∽ Baccalauréat STL Polynésie 10 juin 2011 ∾
Biochimie–Génie biologique

EXERCICE 1 **11 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. a.

Numéro de la semaine x_i	7	8	9	10	11	12	13
y_i	10,08	9,72	9,36	9,00	8,64	8,28	7,92

b. Voir à la fin de l'exercice.

2. a. On a G(10 ; 9).

b. On a $m = \dfrac{y_N - y_G}{x_N - x_G} = \dfrac{8,28 - 9}{12 - 10} = \dfrac{-0,72}{2} = -0,36$.

Puis $b = y_G - x_G \times m = 9 - 10 \times (-0,36) = 9 + 3,6 = 12,6$.

Une équation de la droite d'ajustement est donc $y = -0,36x + 12,6$.

3. a. En utilisant l'équation précédente avec $x = 15$, on obtient $y = -0,36 \times 15 + 12,6 = 12,6 - 5,4 = 7,2$. (résultat visible graphiquement) On a $7,2 = \ln n$ soit $\text{e}^{7,2} = n$. Or $\text{e}^{7,2} \approx 1\,339$. L'ajustement n'est plus valable la 15$^{\text{e}}$ semaine ; le pourcentage d'erreur est :

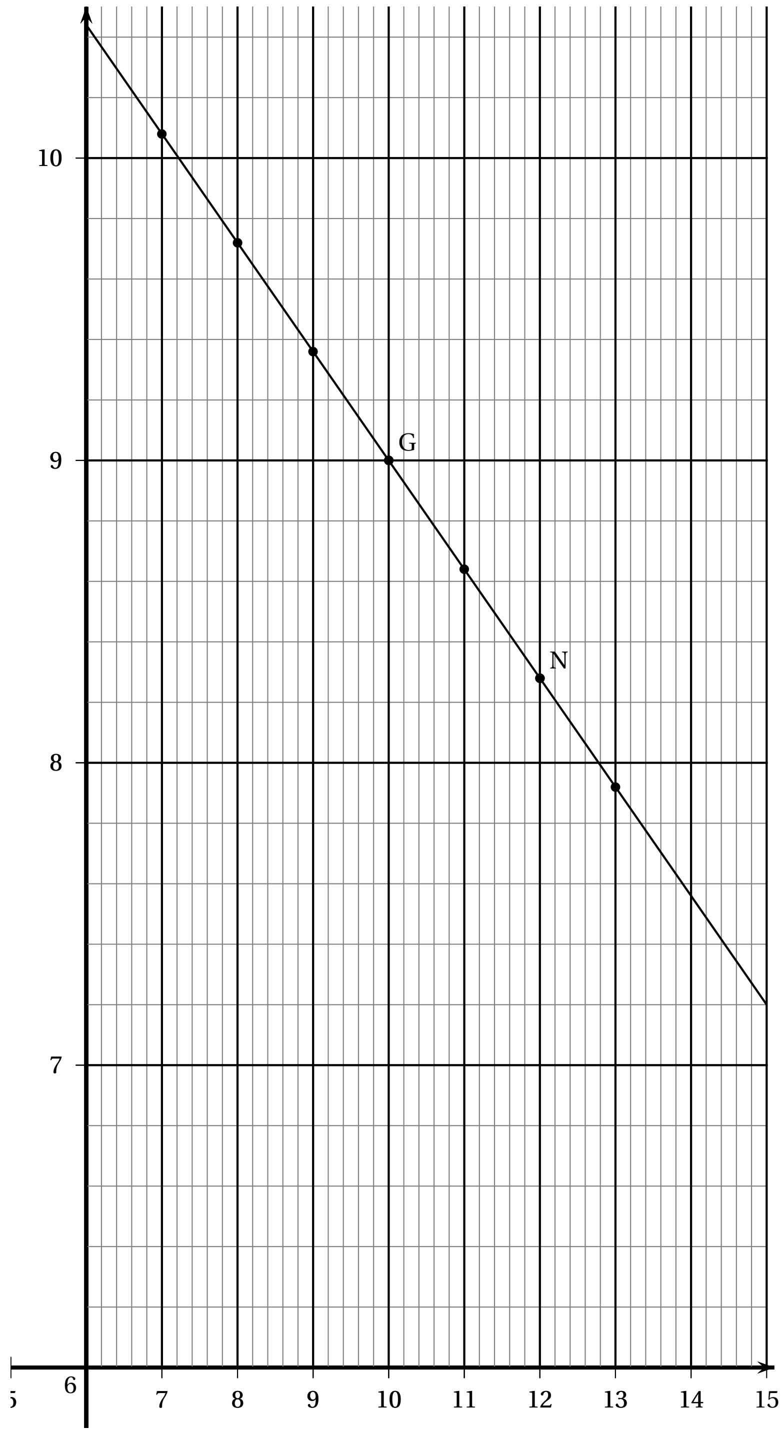
$\dfrac{1\,500 - 1\,339}{1500} = \dfrac{161}{1500} \approx 10,7\,\%$.

b. Déterminer à partir de quelle semaine, le nombre n de personnes nouvellement contaminées sera inférieur ou égal à 1 000. On a $\ln 1\,000 \approx 6,908$.

Il faut donc en utilisant l'ajustement linéaire résoudre l'équation dans $\mathbb{N}$:

$12,6 - 0,36x < 6,908$ soit $12,6 - 6,908 < 0,36x$ ou encore $5,692 < 0,36x$ et enfin $x > \dfrac{5,692}{0,36} \approx 15,8$.

Il faudra donc attendre la semaine 16.



Partie B

1.

Âge	moins de 25 ans	de 25 à 55 ans	plus de 55 ans	Total
Nombre de personnes non contaminées	273 000	195 000	78 000	546 000
Nombre de personnes contaminées	39 000	117 000	78 000	234 000
Total	312 000	312 000	156 000	780 000

2. **a.** On a $p(\text{A}) = \dfrac{234\,000}{780\,000} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
   $p(\text{B}) = \dfrac{156\,000}{780\,000} = \dfrac{2}{10} = 0,2$.
   b. n a $p(\text{A} \cup \text{B}) = p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B})$
   Or $p(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{78\,000}{780\,000} = 0,1$, donc
   $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0,3 + 0,2 - 0,1 = 0,4$.
3. Sur les 156000 personnes de plus de 55 ans, 78 000 sont contaminées soit 50 %. La probabilité qu'elle soit contaminée sachant qu'elle a plus de 55 ans est égale à 0,5.

EXERCICE 2 **9 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$y' = \left(-\frac{1}{3}\ln 2\right) y \quad (1)$$

1. Avec $a \in \mathbb{R}$, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies par $y = C\text{e}^{ax}$, avec C réel quelconque.
   Donc ici les fonctions solutions sont définies par : $y = C\text{e}^{-\frac{1}{3}\ln 2x}$, avec C réel quelconque.
2. Si $f(0) = 5$ alors $C\text{e}^{-\frac{1}{3}\ln 2 \times 0} = 5$, soit $C = 5$.
   On a donc $f(x) = 5\text{e}^{-\frac{1}{3}\ln 2x}$.

Partie B

1. On sait que $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} \text{e}^t = 0$ et comme $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} \left(-\frac{1}{3}\ln 2\right) t = -\infty$, on conclut que $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0$.
   Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.
2. **a.** On a $F'(x) = -\frac{1}{3}\ln 2 \times 5\text{e}^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)t} = -\frac{5}{3}\ln 2\text{e}^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)t}$.
   b. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $f'(0) = -\frac{5}{3}\ln 2$. Elle a donc pour équation $y = -\frac{5}{3}\ln 2x + b$.
   Comme le point de coordonnées (0 ; 5) appartient à cette tangente on a :
   $5 = -\frac{5}{3}\ln 2 \times 0 + b$ soit $b = 5 + \frac{5}{3}\ln 2$.
   L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc
   $y = -\frac{5\ln 2}{3}x + 5 + \frac{5}{3}\ln 2$.
3. $F(t+3) = 5\text{e}^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)(t+3)} = 5\text{e}^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)t} \times \text{e}^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2 \times 3\right)} = 5\text{e}^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)t} \times \text{e}^{-\ln 2} =$
   $5\text{e}^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)t} \times \dfrac{1}{\text{e}^{\ln 2}} = 5\text{e}^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)t} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}F(t)$.

Partie C

1. L'égalité (2) signifie que toutes les trois heures (si t est exprimée en heure) le nombre de cellules est divisé par 2.
2. Il faut résoudre l'équation :
$5\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)t} = 0,75$ ou $\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)t} = 0{,}15$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien :
$-\frac{1}{3}\ln 2 \times t = \ln 0{,}15$ ou encore $t = -\dfrac{3}{\ln 2}\ln 0{,}15$.
Or $-\dfrac{3}{\ln 2}\ln 0{,}15 \approx 8,2109$ soit environ 8 heures 13 minutes.
3. On trace la droite d'équation $y = 0,75$ qui coupe la courbe en un point dont on trouve l'abscisse en le projetant sur l'axe des abscisses. On lit environ 8,2 h.

Document à rendre avec la copie

Annexe