Corrigé du baccalauréat STL Antilles juin 2011
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **5 points**

1. On a $\Delta = 1 - 4 \times 1 = -3 = \left(\text{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :
$\dfrac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{1-\text{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{-\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{5\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{5\pi}{3}$.
2. Posons $u(x) = \text{e}^x + 1$, alors $u'(x) = \text{e}^x$ et $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. On reconnaît la dérivée de la fonction $\ln u(x) = \ln\left(\text{e}^x + 1\right)$ car comme $\text{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, on a $\text{e}^x + 1 > 1 > 0$, donc la fonction $\ln\left(\text{e}^x + 1\right)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Il y a $10 - 2 = 8$ flacons ne présentant que le défaut A,
$6 - 2 = 4$ ne présentant que le défaut B, et 2 qui présentent les deux défauts, soit en tout $8 + 4 + 2 = 14$ flacons avec défaut(s) soit finalement 86 flacons sans défaut.
La probabilité cherchée est donc égale à $\dfrac{86}{10} = 0,86$.

   b. On a le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2
Valeurs de X	3	-1	-4
probabilité	0,86	12	2

   D'où $\text{E}(X) = 3 \times 0,86 + (-1) \times 0,12 + (-4) \times 0,02 = 2,58 - 0,12 - 0,08 = 2,38$ €.
4. L'équation s'écrit $y' = \frac{2}{3}y$.
Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $f(x) = C\text{e}^{\frac{2}{3}x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
Si $f(0) = 3$, alors $C\text{e}^{\frac{2}{3}\times 0} = 3 \iff C = 3$.
La solution est donc définie par $f(x) = 3\text{e}^{\frac{2}{3}x}$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Retrancher 3,7 % revient à multiplier par $1 - \dfrac{3,7}{100} = \dfrac{100 - 3,7}{100} = \dfrac{96,3}{100} = 0,963$.
On a donc $N_1 = 0,963N_0$ et en général $N_{k+1} = 0,963N_k$.
2. La dernière égalité montre que la suite (N_k) est une suite géométrique de premier terme N_0 et de raison 0,963.
3. **a.** On sait que $N_k = N_0 \times 0,963^k = 10^{20} \times 0,963^k$.

   b. 2 ans correspondent à $2 \times 365 = 730$ jours.
Donc $N_{730} = 10^{20} \times 0,963^{730} \approx 111\,478\,111$ atomes.

   c. Il faut résoudre l'équation dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{10^{20}}{2} = 10^{20} \times 0,963^x \iff \dfrac{1}{2} = 0,963^x \iff \ln\frac{1}{2} = x\ln 0,963 \iff -\ln 2 = x\ln 0,963 \iff x = \dfrac{-\ln 2}{\ln 0,963} \approx 18,3$.
La période est donc égal à 19 jours.

PROBLÈME **10 points**

1. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{e}^x = 0$. Or $\text{e}^{2x} = \left(\text{e}^x\right)^2$ donc par produit de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{e}^{2x} = 0$ et finalement par somme de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

   Géométriquement ce résultat signifie que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de moins l'infini.

2. On admet que f est dérivable sur $]-\infty~;~1]$, on note f' sa dérivée.

   a. On a $f'(x) = 2\text{e}^x - 2\text{e}^{2x} = 2\text{e}^x - 2\left(\text{e}^x\right)^2 = 2\text{e}^x\left(1 - \text{e}^x\right)$.

   b. On sait que pour tout réel x, $\text{e}^x > 0$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - \text{e}^x$.

   Or $1 - \text{e}^x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \text{e}^x \iff 0 \geqslant x$, par croissance de la fonction logarithme népérien.

   La dérivée est donc positive sur l'intervalle $]-\infty~;~0]$ et de la même façon $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0~;~1]$.

   c. La fonction est donc croissante sur $]-\infty~;~0]$ et décroissante sur $[0~;~1]$.

   d. On a $f(0) = 2 - 1 = 1$ et $f(1) = 2\text{e} - \text{e}^2$.

   D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$2\text{e} - \text{e}^2$

3. **a.** Il faut résoudre l'équation $f(x) = 0 \iff \text{e}^x\left(2 - \text{e}^x\right) = 0 \iff 2 - \text{e}^x = 0$ car $\text{e}^x > 0$ et $2 = \text{e}^x \iff x = \ln 2 \approx 0,69 < 1$.

   On a donc une seule solution $f(\ln 2) = 0$.

   b. On a $M(\ln 2~;~0)$ et le nombre dérivé en $\ln 2$ est égal à $f'(\ln 2) = 2\text{e}^{\ln 2} - 2\text{e}^{2\ln 2} = 2\text{e}^{\ln 2} - 2\left(\text{e}^{\ln 2}\right)^2 = 2 \times 2 - 2 \times 2^2 = 4 - 8 = -4$.

   Une équation de la tangente en M est donc :

   $y = -4x + b$. $M(\ln 2~;~0) \in T \iff 0 = -4 \times \ln 2 + b \iff b = 4\ln 2$.

   L'équation réduite de T est donc $y = -4x + 4\ln 2$

4. Voir à la fin.

   a. Une primitive de la fonction e^x est e^x, une primitive de la fonction e^{2x} est la fonction $\dfrac{1}{2}\text{e}^{2x}$.

   Donc une primitive F de f sur $]-\infty~;~1]$ est la fonction $F(x) = 2\text{e}^x - \dfrac{1}{2}\text{e}^{2x}$.

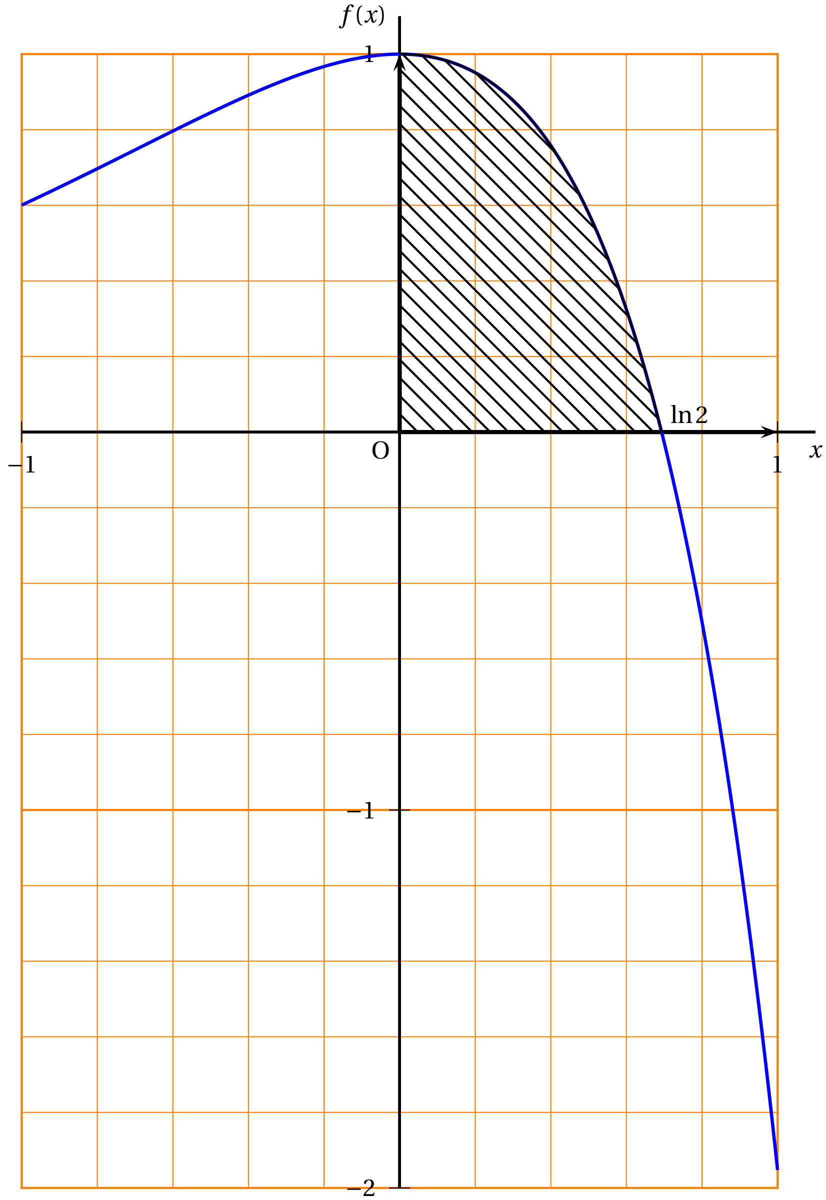
   b. La fonction f est décroissante de $f(0) = 1$ à $f(\ln 2) = 0$: elle est donc positive sur l'intervalle $[0~;~\ln 2]$;

   La fonction f est décroissante de $f(\ln 2) = 0$ à $f(1) \approx -1,95$: elle est donc négative sur l'intervalle $[\ln 2~;~1]$.

   c. On vient de voir que sur l'intervalle $[0~;~\ln 2]$ la fonction f est positive. L'aire de la surface D est donc en unité d'aire égale à l'intégrale :

   $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_0^{\ln 2} = F(\ln 2) - F(0) = 2\text{e}^{\ln 2} - \frac{1}{2}\text{e}^{2\ln 2} - \left(2\text{e}^0 - \frac{1}{2}\text{e}^{2 \times 0}\right) = 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ unité d'aire.

   Or une unité d'aire vaut $5 \times 5 = 25$ cm^2. Donc l'aire du domaine D est égale à $25 \times \dfrac{1}{2} = 12,5$ cm^2.


$f(x)$
1
ln 2
O
−1
1
x
−1
−2