∾ Corrigé du baccalauréat STMG Centres étrangers ∾
11 juin 2018

EXERCICE 1 **(4 points)**

À l'issue de la célébration du 500e anniversaire de sa ville, le directeur de l'office du tourisme a commandé une enquête visant à estimer les retombées économiques de cette manifestation. Cette enquête a été réalisée auprès de personnes s'y étant rendues. Il en ressort que :

- 15 % des personnes interrogées ont entre 18 et 25 ans ;
- 40 % des personnes interrogées ont entre 26 et 45 ans ;
- 45 % des personnes interrogées ont 46 ans ou plus.

Il a été demandé aux personnes interrogées si elles s'étaient rendues au restaurant lors de cette manifestation. Les réponses sont synthétisées ci-dessous :

- parmi les 18-25 ans, 28 % se sont rendus au restaurant ;
- parmi les 26-45 ans, 42 % se sont rendus au restaurant ;
- parmi les personnes de 46 ans ou plus, 63 % se sont rendues au restaurant.

Ce questionnaire a permis de remplir une fiche par personne interrogée, précisant son âge et indiquant si elle s'est rendue ou non au restaurant.
On choisit de façon équiprobable l'une de ces fiches.
On définit les évènements suivants :

E : « la fiche est celle d'une personne ayant entre 18 et 25 ans »
F : « la fiche est celle d'une personne ayant entre 26 et 45 ans »
G : « la fiche est celle d'une personne ayant plus de 46 ans »
R : « la fiche est celle d'une personne s'étant rendue au restaurant »

1. L'arbre pondéré est complété sur **l'annexe, à rendre avec la copie**.
2. $F \cap R$ est l'évènement : « la fiche est celle d'une personne ayant entre 26 et 45 ans et qui s'est rendue au restaurant ».
   Calculons sa probabilité. $p(F \cap R) = p(F) \times p_F(R) = 0{,}4 \times 0{,}42 = 0{,}168$.
3. Montrons que la probabilité de l'évènement R est égale à 0,4935.
   $p(R) = p(E) \times p_E(R) + p(F) \times p_F(R) + p(G) \times p_G(R)$
   $p(R) = 0{,}15 \times 0{,}28 + 0{,}4 \times 0{,}42 + 0{,}45 \times 0{,}63 = 0{,}042 + 0{,}168 + 0{,}283\,5 = 0{,}493\,5$.
   La probabilité de R est bien égale à 0,493 5
4. Sachant que la fiche choisie est celle d'une personne s'étant rendue au restaurant lors des festivités de 2017, la probabilité que ce soit celle d'une personne ayant plus de 46 ans est notée $p_R(G)$.
   $p_R(G) = \dfrac{p(G \cap R)}{p(R)} = \dfrac{0{,}283\,5}{0{,}493\,5} \approx 0{,}574\,5$.

EXERCICE 2 **(4 points)**

Une entreprise de blanchisserie propose à ses clients d'utiliser sur place ses machines à laver. Conscient des enjeux environnementaux, le gérant s'interroge sur la consommation en eau, par cycle de lavage, de ses machines. Il fait réaliser une étude par une société de conseil spécialisée dans l'accompagnement vers la transition énergétique.

1. Cette étude permet de modéliser la consommation en eau, exprimée en litre, par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance 90 et d'écart type 5. Le graphique figurant **en annexe, à rendre avec la copie**, représente la courbe de densité de la variable aléatoire X.
   Le domaine correspondant à l'évènement $\{X > 80\}$ est hachuré sur ce graphique. À l'aide d'une calculatrice, nous trouvons que la valeur de sa probabilité est environ 0,977 25.
2. La société de conseil suggère au gérant de remplacer ses machines par de nouvelles, moins énergivores et mieux éco-conçues. Leur consommation en eau, exprimée en litre, est modélisée par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance 45 et d'écart type 2.
   Un graphique **en annexe** représente la courbe de densité de la variable aléatoire Y.
   Dans le contexte de l'exercice, l'aire du domaine hachuré est la probabilité que la consommation d'eau, exprimée en litre, soit comprise entre 41 et 49 ℓ. $p(41 \leqslant Y \leqslant 49) \approx 0{,}954\,5$.
   remarque 41=μ−2σ et 49 = μ+2σ. Nous savons que $p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.

3. La société de conseil affirme au gérant que 90 % des clients sont sensibles aux questions environnementales.
Avant de remplacer son parc de machines, le gérant réalise un sondage auprès de 350 clients.
Ce sondage révèle alors que, parmi eux, 290 y sont sensibles.
Ce résultat permet-il de remettre en cause l'affirmation de la société de conseil ?

Nous avons $n = 350$ et $p = 0,9$. Un intervalle de fluctuation est $I = \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

$I = \left[0,9 - \dfrac{1}{\sqrt{350}}\ ;\ 0,9 + \dfrac{1}{\sqrt{350}}\right] \approx [0,847\ ;\ 0,953]$.

La fréquence observée est $\dfrac{209}{350} \approx 0,829$. N'appartenant pas à l'intervalle de fluctuation, avec un risque d'erreur de 5 %, ce résultat remet en cause l'affirmation de la société de conseil.

EXERCICE 3 **(7 points)**

Julien vient de créer une application informatique destinée aux particuliers et permettant l'organisation d'évènements. Le 1er avril 2018, il envoie une offre de téléchargement de son application à toutes les personnes de son carnet d'adresses. Chaque semaine, il a relevé le nombre de personnes ayant téléchargé son application. Ses observations sur les cinq premières semaines sont répertoriées dans le tableau ci-dessous. Le rang 0 correspond à la semaine du 1er au 7 avril 2018.

x_i : rang de la semaine	0	1	2	3	4
y_i : nombre de téléchargements	150	180	210	260	296

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : étude d'un premier modèle

Une représentation graphique du nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ est donnée en annexe.

1. À l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 37,2x + 144,8$.

2. Julien décide d'ajuster ce nuage par la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 37x + 145$.
Déterminons les coordonnées de deux points de la droite $\mathscr{D}$.
Par exemple $x = 0$, $y = 145$ soit le point de coordonnées $(0\ ;\ 145)$.
ou encore $x = 7$ $y = 37 \times 7 + 145 = 404$ soit le second point $(7\ ;\ 404)$.
Plaçons ces points sur le repère et traçons la droite $\mathscr{D}$ passant par ces deux points

3. Selon ce modèle, déterminons le nombre de téléchargements attendus à la fin de la semaine de rang 10. Pour ce faire, remplaçons x par 10 dans l'équation de la droite. $y = 37 \times 10 + 145 = 515$.
Selon ce modèle, le nombre de téléchargements attendus à la fin de la semaine de rang 10 est de 515.

Partie B : étude d'un second modèle

En réalité, le nombre de téléchargements effectués jusqu'à la fin de la semaine de rang 10 est donné par le tableau ci-dessous.

x_i : rang de la semaine	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i : nombre de téléchargements	150	180	210	260	296	370	457	572	698	883	1 095

1. Calculons le taux d'évolution global du nombre de téléchargements entre la semaine de rang 4 et la semaine de rang 10.
Le taux d'évolution $\mathscr{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.
$\mathscr{T} = \dfrac{1095 - 296}{296} \approx 2,6973$.
En pourcentage, arrondi à l'unité, le taux d'évolution global est bien de 270 %.

2. Déterminons le taux d'évolution hebdomadaire moyen du nombre de téléchargements entre la semaine de rang 4 et la semaine de rang 10.
   En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^6$ puisque le nombre de téléchargements a subi 6 évolutions durant cette période.
   $(1+t_m)^6 = \dfrac{1\,095}{296} \approx 3{,}699\,32$ par conséquent $t_m = 3{,}699\,32^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0{,}243\,618$.
   Le taux hebdomadaire moyen d'évolution du nombre de téléchargements entre la semaine de rang 4 et la semaine de rang 10, arrondi à 0,01 %, est égal à 24,36 %.

On fait l'hypothèse qu'à partir de la semaine de rang 10, le taux d'évolution hebdomadaire du nombre de téléchargements est constant et égal à 24 %.

Le nombre de téléchargements hebdomadaires au cours de la semaine de rang $(10+n)$ est alors modélisé par le terme u_n d'une suite de premier terme $u_0 = 1\,095$.

3. À un taux d'évolution de 24 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,24. Chaque terme se déduisant du précédent en le multipliant par 1,24 la suite $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison 1,24 et de premier terme 1 095.
4. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.
   $u_n = 1\,095 \times (1{,}24)^n$.
5. Selon ce modèle, calculons le nombre de téléchargements que Julien peut espérer lors de la semaine de rang 20. Nous avons alors $n = 10$.
   En remplaçant n par 10 dans l'expression de u_n, nous obtenons, arrondi à l'unité,
   $u_{10} = 1\,095 \times (1{,}24)^{10} \approx 9\,411$.
6. Un sponsor a contacté Julien, lui proposant une participation financière pour promouvoir son projet à plus grande échelle, dès lors que le nombre de téléchargements hebdomadaires dépassera 20 000. Les deux lignes non renseignées dans l'algorithme donné en **annexe, à rendre avec la copie**, pour qu'après exécution, la variable N contienne le rang de la semaine à partir de laquelle Julien sera sponsorisé y sont complétées.

EXERCICE 4 **(5 points)**

Une entreprise est spécialisée dans le recyclage de bouteilles d'eau en plastique.
Elle peut produire chaque jour entre 0 et 10 tonnes de plastique qu'elle revend en totalité au prix unitaire de 700 € la tonne.
On rappelle que le coût moyen correspondant à la production de x tonnes de plastique est défini par
$C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$, où $C_T(x)$ est le coût total pour la production de x tonnes de plastique.
Le coût marginal, noté C_m, est le coût induit par la production d'une tonne de plastique supplémentaire lorsqu'on a déjà produit x tonnes de plastique.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Sur l'**annexe** sont tracées les courbes représentant les coûts moyen et marginal (en euro) en fonction de la quantité de plastique produite (en tonne) ainsi que la droite représentant le prix de vente unitaire.

On admet que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

1. Déterminons graphiquement la quantité de plastique que doit produire l'entreprise pour que le coût moyen soit minimal.
   Lisons l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentant le coût moyen avec la courbe représentant le coût marginal.
   Avec la précision permise par le graphique, nous lisons 5.
   La quantité de plastique que doit produire l'entreprise pour que le coût moyen soit minimal est de cinq tonnes.
2. Déterminons graphiquement ce coût moyen minimal.
   Lisons l'ordonnée du point de la courbe représentant le coût moyen d'abscisse 5.
   Avec la précision permise par le graphique, nous lisons 400.
   Le coût moyen pour la production de cinq tonnes de plastique est de 400 euros.
   Le coût total correspondant est alors de 400×5 soit 2 000 euros.

Partie B

On dit qu'il y a profit lorsque le prix de vente unitaire est strictement supérieur au coût moyen.
On admet que le profit de l'entreprise est maximal lorsque le coût marginal est égal au prix de vente unitaire.

1. Déterminons graphiquement les quantités de plastique produites pour que l'entreprise réalise un profit.

   Nous lisons les abscisses des points de la courbe représentant le coût moyen pour lesquels leur ordonnée est strictement inférieure à l'ordonnée du point de la droite correspondant au prix de vente unitaire soit 700 euros.

   Ces abscisses, avec la précision permise par le graphique, appartiennent à l'intervalle $]2\,;\,9[$.

2. Déterminons graphiquement la quantité de plastique que doit produire l'entreprise pour que le profit soit maximal.

   Le profit de l'entreprise est maximal lorsque le coût marginal est égal au prix de vente unitaire.

   Lisons l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentant le coût marginal avec la droite représentant le prix unitaire.

   Avec la précision permise par le graphique, nous lisons 6.

3. Le coût moyen correspondant à cette production est l'ordonnée du point de cette courbe d'abscisse 6.

   Avec la précision permise par le graphique, nous lisons 430.

4. Le coût total correspondant est alors de 430×6 soit 2 580 euros .

5. Calculons le profit total maximal.

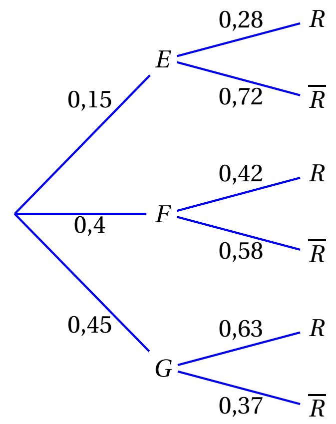
   $(700 - 430) \times 6 = 270 \times 6 = 1\,620$.

   Le profit total maximal est d'environ 1 620euros.

   Remarque Nous aurions pu utiliser la différence entre le montant de la vente (700×6) et le coût total.

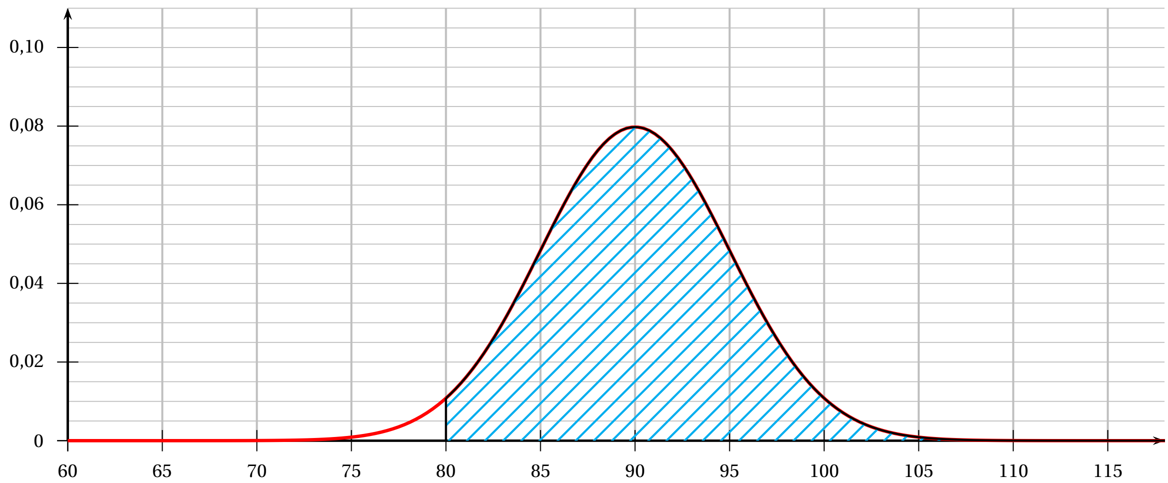
ANNEXE (à rendre avec la copie)

EXERCICE 1

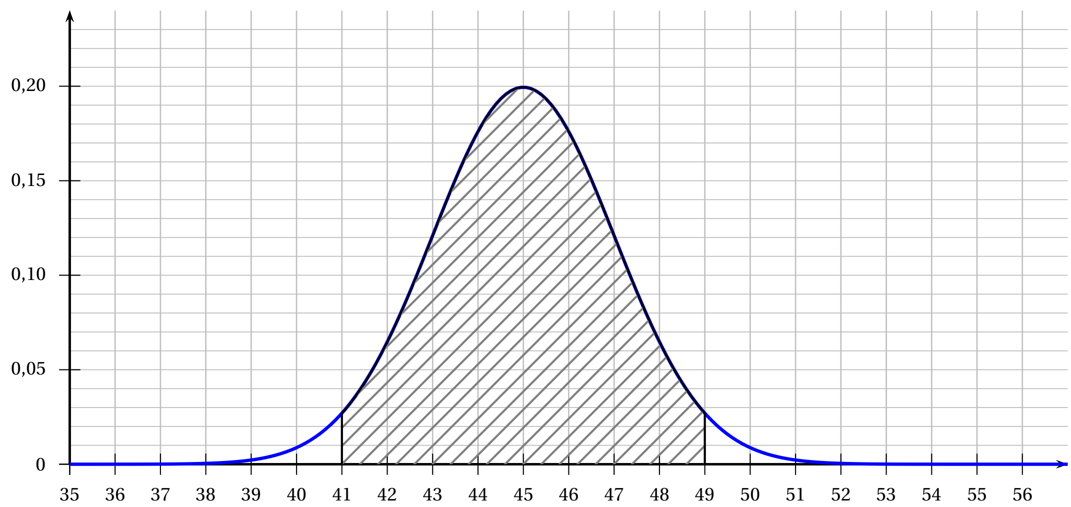


EXERCICE 2

Question 1.

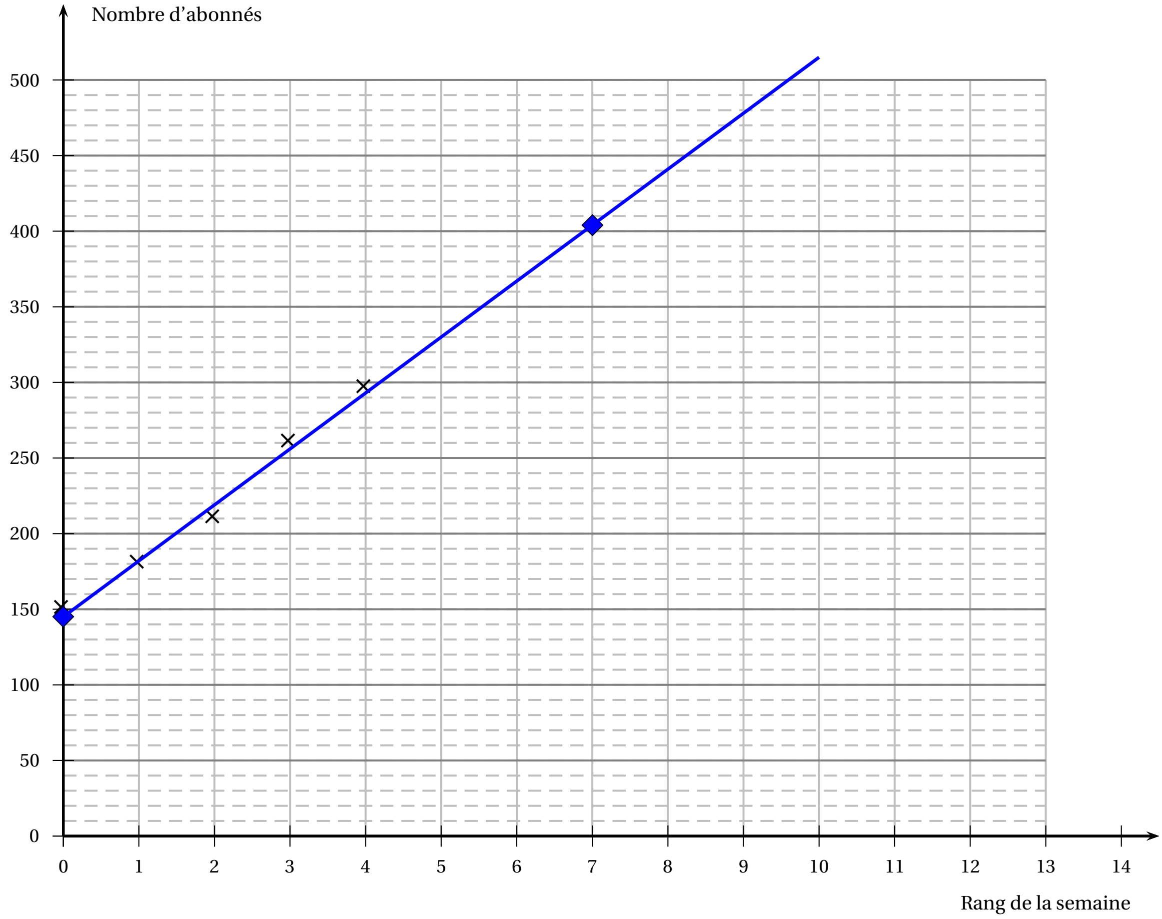


Question 2.



ANNEXE (à rendre avec la copie)

EXERCICE 3 - Partie A, question 2



EXERCICE 3 - Partie B, question 6

```
N ← 0
U ← 1095
Tant que U ⩽ 20000
    N ← N + 1
    U ← 1,24U
Fin Tant que
N ← 10 + N
```

ANNEXE (À rendre avec la copie)

Exercice 4