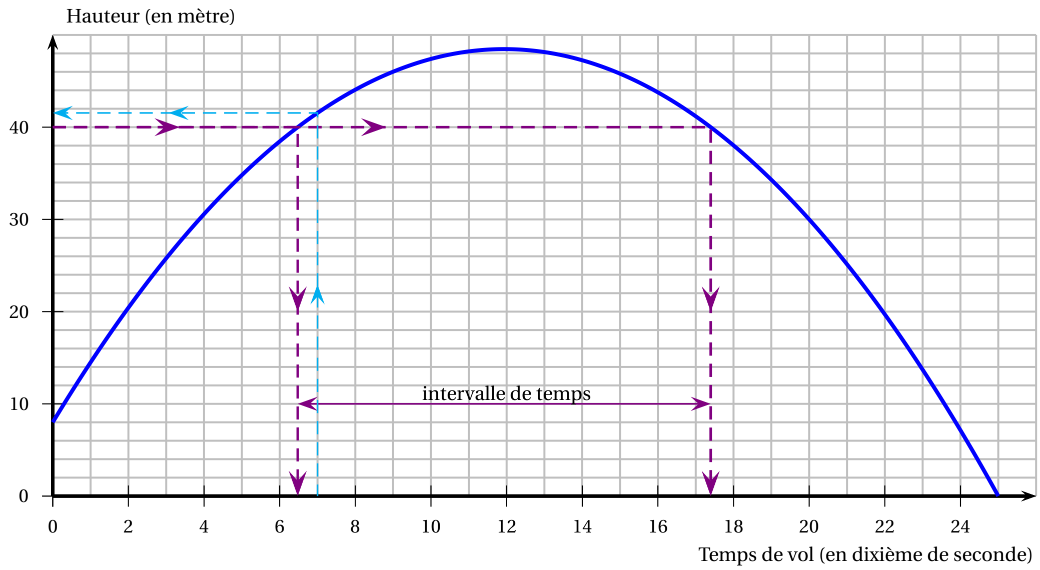
∽ Corrigé du baccalauréat STMG Centres étrangers ∾
14 juin 2017

EXERCICE 1 **(5 points)**

À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plate-forme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusée, notés A et B.

Partie A

La hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, est modélisée par la courbe ci-dessous.



Avec la précision permise par le graphique,

1. la hauteur qu'atteindra la fusée après 0,7 seconde de vol est d'environ 41,7 m. Nous lisons l'ordonnée du point d'abscisse 7 appartenant à la courbe.
2. l'intervalle de temps auquel doit appartenir x pour satisfaire à cette contrainte, la fusée doit exploser à une altitude supérieure à 40 mètres, est approximativement $[6{,}5;\ 17{,}4]$. Nous lisons les abscisses des points d'ordonnée 40, ce qui donne les bornes de l'intervalle et nous considérons toutes les abscisses pour lesquelles l'ordonnée du point de la courbe est supérieure.

Partie B

On modélise la hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type B en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, par la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,20]$ par : $f(x) = -0{,}5x^2 + 10x + 8$.

Comme dans le cas des fusées de type A, l'explosion des fusées de type B doit avoir lieu lorsque celles-ci sont situées à une altitude supérieure ou égale à 40 mètres. On cherche à déterminer l'intervalle dans lequel doit se trouver x pour satisfaire à cette contrainte.

1. **a.** Montrons que pour satisfaire à la contrainte posée, x doit être solution de l'inéquation $-0{,}5x^2 + 10x - 32 \geqslant 0$.

   Pour que la contrainte soit satisfaite, nous devons résoudre $f(x) \geqslant 40$ c'est-à-dire $-0{,}5x^2 + 10x + 8 \geqslant 40$ ou $-0{,}5x^2 + 10x + 8 - 40 \geqslant 0$.

   En simplifiant, nous obtenons l'inéquation proposée.

b. Dressons le tableau de signes de la fonction qui à x associe $-0,5x^2+10x-32$ sur l'intervalle $[0\,;20]$

Déterminons d'abord les racines de $-0{,}5x^2+10x-32$. Étant un trinôme du second degré calculons Δ.

$\Delta = 10^2 - 4\times(-0{,}5)\times(-32) = 100-64 = 36$. $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $\quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$x_1 = \dfrac{-10-\sqrt{36}}{2\times(-0{,}5)} = \dfrac{-16}{-1} = 16$; $\quad x_2 = 10-6 = 4$.

Lorsque $x_1 < x_2$, un trinôme du second degré est du signe de a pour $x \in]-\infty\,;\,x_1[\cup]x_2\,;\,+\infty[$ et du signe de $(-a)$ pour $x \in]x_1\,;\,x_2[$.

d'où :

Pour $x \in\ ]-\infty\,;4[\cup]16\,;\,+\infty[,\quad -0{,}5x^2+10x-32<0$,

pour $x \in]4\,;\,16[,\quad -0{,}5x^2+10x-32>0$

Il en résulte alors sur $[0;\,20]$:

x	0		4		16		20
signe de $-0{,}5x^2+10x-32$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'intervalle dans lequel doit se trouver x pour satisfaire à cette contrainte est $[4;\,16]$

2. **a.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0;\,20]$, calculons $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de f.

$f'(x) = -0{,}5(2x)+10 = -x+10$

b. L'artificier souhaite connaître le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est le nombre dérivé de la fonction en a.

Le coefficient directeur en 0 est $f'(0)$ soit 10. La tangente en 0 à la courbe a pour coefficient directeur 10.

3. Pour des raisons d'esthétique, l'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsque celles-ci seront à leur hauteur maximale.

Lorsque $f'(x)=0$, la fonction peut admettre un extremum. Puisque la fonction dérivée s'annule en 10 en étant positive avant 10 et négative après, la fonction admet un maximum en 10. L'artificier doit alors programmer un temps de vol avant explosion d'une seconde ou dix-dixièmes.

EXERCICE 2 **(5 points)**

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul, donne les indices de référence des loyers, notés IRL, au dernier trimestre de chaque année depuis 2009 (base 100 pour l'année 1998) et leurs évolutions annuelles.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
2	Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
3	Indice de référence des loyers y_i	117,47	119,17	121,68	123,97	124,83	125,29	125,28
4	Taux d'évolution de l'IRL (arrondi à 0,01 %)		1,45					

Source : INSEE

Partie A

1. La cellule C 4 est au format pourcentage arrondi à 0,01 %. Une formule que nous pouvons entrer dans cette cellule pour obtenir, par recopie sur la droite, l'ensemble des valeurs de la plage de cellules C 4 : H 4 est

=(C$3-B$3)/B$3.

2. La loi française dispose que pour une révision annuelle d'un loyer, le taux d'évolution du loyer ne peut être supérieur à celui de l'IRL de l'année écoulée. Par exemple, un propriétaire ne peut augmenter le loyer de 2010 de plus de 1,45 % en janvier 2011. Un propriétaire propose un loyer de 650 € mensuel au dernier trimestre 2010 et souhaite le réviser et le passer à 658 € mensuel pour l'année 2011.

Calculons le montant du loyer s'il subit une augmentation de 1,45 %.

À un taux d'évolution de 1,45 % correspond un coefficient multiplicateur de $1+\frac{1,45}{100}$ soit 1,014 5.

$650 \times 1,0145 = 659,425$. Ayant choisi un prix inférieur au montant maximal, le propriétaire est en accord avec la loi.

Remarque : Nous pouvions calculer le pourcentage d'augmentation entre 650 et 658 et le comparer à 1,45 %

3. **a.** Le taux d'évolution $\mathscr{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

Calculons le taux d'évolution arrondi à 0,01 % de l'IRL entre le dernier trimestre 2009 et le dernier trimestre 2015.

$\mathscr{T} = \dfrac{125,28-117,47}{117,47} \approx 0,066485$, soit en pourcentage 6,65 %

b. En appelant t_m le taux moyen, le coefficient multiplicateur global est aussi $(1+t_m)^6$ puisque l'IRL a subi 6 évolutions durant cette période.

$(1+t_m)^6 = \dfrac{125,28}{117,47} \approx 1,066485$ par conséquent $t_m = 1,066485^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0,010786$.

Le taux d'évolution annuel moyen de l'IRL entre le dernier trimestre 2009 et le dernier trimestre 2015, arrondi à 0,01 %, est d'environ 1,08 %.

Partie B

1. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 1,386x + 116,981$, les coefficients étant arrondis au millième.

Dans la suite de l'exercice on décide de prendre comme droite d'ajustement de y en x la droite D d'équation $y = 1,39x + 117$.

2. **a.** Au dernier trimestre 2017, nous avons $x = 9$. En remplaçant x par cette valeur dans l'équation de la droite, nous obtenons $y = 1,39 \times 9 + 117 = 129,51$.

À l'aide de cet ajustement, au dernier trimestre 2017, une estimation de l'IRL est 129,51.

De la même manière, une estimation de l'IRL au dernier trimestre 2018 est 130,9.

b. Entre le dernier trimestre 2017 et le dernier trimestre 2018 l'IRL a été multiplié par $\dfrac{130,9}{129,51}$ soit environ 1,010 7.

Le loyer mensuel d'un appartement s'élève à 850 € au dernier trimestre de l'année 2018. Si le propriétaire envisage à cette période une révision de ce loyer, alors il peut au maximum le multiplier par 1,0107. La somme maximale, arrondie à l'euro, qu'il peut exiger de son locataire pour janvier 2019 est $850 \times 1,0107$ soit 859 €.

EXERCICE 3 (6 points)

Une étude menée en 2010 par l'institut national de prévention et d'éducation à la santé évalue le comportement face au tabac en fonction de l'âge d'initiation.

Cette étude menée auprès d'un panel de personnes âgées de 20 ans à 25 ans et ayant déjà testé la cigarette présente les conclusions suivantes :

— la probabilité de devenir un fumeur régulier est de 0,65 si la première cigarette a été fumée avant l'âge de 14 ans ;

— cette probabilité est de 0,52 si la première cigarette a été fumée entre 14 ans et 17 ans ;

— cette probabilité est enfin de 0,32 si la première cigarette a été fumée après l'âge de 17 ans.

On interroge 500 personnes, choisies au hasard, âgées de 20 à 25 ans ayant déjà fumé. Le tableau ci-dessous donne la répartition des personnes interrogées selon l'âge qu'elles avaient lors de la consommation de leur première cigarette.

Âge	Avant 14 ans	Entre 14 ans et 17 ans	Après 17 ans
Pourcentage des personnes interrogées	28 %	57 %	15 %

On choisit une personne au hasard parmi les 500 interrogées.
Dans la suite de l'exercice, on note :

— F l'évènement « la personne choisie est un fumeur régulier »

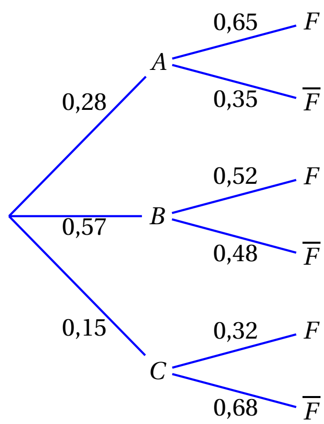
— A l'évènement « la personne choisie a fumé sa première cigarette avant l'âge de 14 ans » ;

— B l'évènement « la personne choisie a fumé sa première cigarette entre 14 ans et 17 ans » ;

— C l'évènement « la personne choisie a fumé sa première cigarette après l'âge de 17 ans ».

Pour tout évènement A, on notera $p(A)$ sa probabilité, $\overline{A}$ son évènement contraire, et, pour tout évènement B de probabilité non nulle, $P_B(A)$ la probabilité de l'évènement A sachant que B est réalisé.

1. En considérant encore valables les conclusions de l'étude menée en 2010, complétons l'arbre pondéré suivant.



2. La probabilité que la personne choisie ait fumé avant l'âge de 14 ans et soit un fumeur régulier est notée $p(A \cap F)$.

$p(A \cap F) = p(A) \times p_A(F) = 0{,}28 \times 0{,}65 = 0{,}182$.

3. Montrons que $p(F) = 0{,}526\,4$.

$p(F) = p(A \cap F) + p(B \cap F) + p(C \cap F) = p(A) \times p_A(F) + p(B) \times p_B(F) + p(C) \times p_C(F)$.

$p(F) = 0{,}28 \times 0{,}65 + 0{,}57 \times 0{,}52 + 0{,}15 \times 0{,}32 = 0{,}182 + 0{,}296\,4 + 0{,}048 = 0{,}526\,4$.

Ce qui correspond bien à la valeur cherchée.

4. Sachant que la personne choisie est un fumeur régulier, la probabilité qu'il ait fumé sa première cigarette avant l'âge de 14 ans est notée $p_F(A)$.

$p_F(A) = \dfrac{p(A \cap F)}{p(F)} = \dfrac{0{,}182}{0{,}526\,4} \approx 0{,}345\,745$.

Sachant que la personne choisie est un fumeur régulier, la probabilité, arrondie à 10^{-4}, qu'il ait fumé sa première cigarette avant l'âge de 14 ans est 0,345 7.

5. L'échantillon étudié compte 294 fumeurs réguliers. À l'aide du résultat de la question **3.** et d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, montrons que le nombre de fumeurs réguliers de cet échantillon est anormalement élevé.

L'intervalle de fluctuation au niveau de 95 % est $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ d'où en arrondissant à 0,001

$\left[0{,}526\,4 - \dfrac{1}{\sqrt{500}}\ ;\ 0{,}526\,4 + \dfrac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0{,}481\ ;\ 0{,}572]$

Dans l'échantillon la proportion est $\dfrac{294}{500}$ soit 0,588. Cette valeur n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation par conséquent au niveau de 95 %, nous pouvons affirmer que le nombre de fumeurs réguliers de cet échantillon est anormalement élevé.

EXERCICE 4 **(4 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Un apiculteur constate qu'entre le 1er mars 2014 et le 1er mars 2016, la population d'abeilles adultes de sa ruche a diminué de 15 % par an.

1. Au 1er mars 2016 l'apiculteur dénombre 55 200 abeilles adultes dans sa ruche, à combien peut-on estimer le nombre d'abeilles adultes, arrondi à la centaine, qui peuplaient la ruche au 1er mars 2014 ?

   ~~**a.** 73 000~~ ~~**b.** 107 100~~ $\boxed{\textbf{c. } 76\,400}$ ~~**d.** 71 800~~

L'apiculteur fait l'hypothèse que cette baisse régulière de 15 % va se poursuivre dans les années à venir. Pour pallier cette perte, il décide d'introduire 15 000 abeilles adultes supplémentaires dans sa ruche au 1er mars de chaque année à partir de 2017.

2. Avec cette hypothèse, combien d'abeilles adultes, à la centaine près, peupleront la ruche au 1er mars 2018 après l'apport de l'apiculteur ?

   $\boxed{\textbf{a. } 67\,600}$ ~~**b.** 70 000~~ ~~**c.** 72 400~~ ~~**d.** 63 500~~

L'apiculteur décide de poursuivre cet apport annuel de 15 000 abeilles adultes jusqu'à ce que la population de sa ruche atteigne 80 000 abeilles adultes.

3. Lequel de ces quatre algorithmes permet de déterminer le nombre d'années (à partir de 2016) nécessaires pour atteindre cet objectif?

a.

Variables
a est un nombre réel
n est un nombre entier

Traitement
a prend la valeur 55 200
n prend la valeur 0
Tant que $n > 80\,000$
  a prend la valeur $a \times 0,85 + 15\,000$
  n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
Afficher n

b.

Variables
a est un nombre réel
n est un nombre entier

Traitement
n prend la valeur 0
Tant que $a < 80\,000$
  a prend la valeur 55 200
  a prend la valeur $a \times 0,85 + 15\,000$
  n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
Afficher n

c.

Variables
a est un nombre réel
n est un nombre entier

Traitement
n prend la valeur 0
a prend la valeur 55 200
Tant que $a < 80\,000$
  a prend la valeur $a \times 0,85 + 15\,000$
  n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
Afficher a

d.

Variables
a est un nombre réel
n est un nombre entier

Traitement
a prend la valeur 55 200
n prend la valeur 0
Tant que $a < 80\,000$
  a prend la valeur $a \times 0,85 + 15\,000$
  n prend la valeur $n + 1$
Fin Tant que
Afficher n

4. On admet que la production moyenne de miel d'une ruche, en kilogramme, est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 15$ et d'écart type $\sigma = 5$.

   La probabilité $p(5 \leqslant X \leqslant 25)$ arrondie à 0,01 est égale à :

   ~~**a.** 0,68~~ ~~**b.** 0,99~~ $\boxed{\textbf{c. } 0,95}$ ~~**d.** 0,50~~

Si vous photocopiez ce corrigé pensez à en créditer l'**A. P. M. E. P.**, merci.