

## ☞ Corrigé du concours contrôleur des douanes session 2012 ☞

### Concours : surveillance et aéronautique : pilote d'avion

Durée : 3 heures

#### OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

##### Exercice 1

Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = 2^{\sin^2 x} - \cos x.$$

1.

- $f(0) = 2^{\sin^2(0)} - \cos 0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ;
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^1 - 0 = 2$ ;
- $f(\pi) = 2^{(-1)^2} - (-1) = 2^{(-1)^2} - 0 = 2^1 = 2$ ;
- $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2^1 - 0 = 2$ ;
- $f(2\pi) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ .

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi, \quad x = \frac{3\pi}{2}, \quad x = 2\pi.$$

2. Comme  $-1 \leq \cos x \leq 1$ ,  $f$  s'annule uniquement si  $2^{\sin^2 x} = 1$  ou  $2^{\sin^2 x} = -1$ .

$$\text{Or } 2^{\sin^2 x} = 1 \iff \sin^2 x = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2\pi.$$

On retrouve les deux solutions de la première question ;

- $2^{\sin^2 x} = -1$  : ceci n'est possible car  $2^{\sin^2 x} \geq 1$  et  $-1 < 0$ .

Donc sur l'intervalle  $]0 ; 2\pi[$ , l'équation  $f(x) = 0$  n'a pas de solution.

3. Comme  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  et  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ , on en déduit que la fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique.

Les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sont les réels de la forme  $0 + 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

##### Exercice 2

1. D'après l'énoncé on a  $p_i = k \times i$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ .

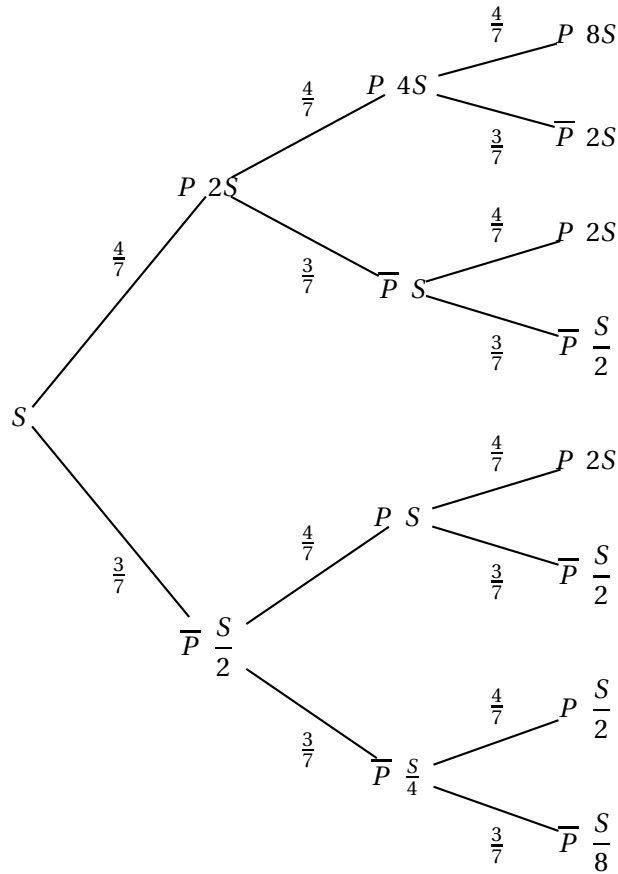
$$\text{Or on a } p_2 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \iff k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1 \iff 21k = 1 \iff k = \frac{1}{21}.$$

$$\text{On a donc pour } 1 \leq i \leq 6 : p_i = \frac{i}{21}.$$

2. On a  $p(\text{impair}) = p_1 + p_3 + p_5 = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$ .

$$\text{On a donc } p(\text{pair}) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

- a. Sophie dispose au départ d'une somme  $S$  : voici l'arbre pondéré donnant les gains (ou pertes) à chaque lancer :



b. On a  $p(8S) = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343}$  ;  
 $p(2S) = 3 \times \left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \frac{3}{7} = \frac{144}{343}$  ;  
 $p\left(\frac{S}{2}\right) = 3 \times \left(\frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{108}{343}$  ;  
 $p\left(\frac{S}{8}\right) = \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{27}{343}$  .

c. La probabilité de gagner est égale à :

$$p(8S) + p(2S) = \frac{64}{343} + \frac{144}{343} = \frac{208}{343} \approx 0,61.$$

61 % de chances de gagner sur un grand nombre de parties donc 39 % de chances de perdre ; le jeu est en faveur de Sophie.

d. Trois faces portant un nombre pair donc 3 faces portant un nombre impair, donc

$$p(\text{pair}) = p(\text{impair}) = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Sophie aura donc 1 chance sur 2 de gagner et 1 chance sur 2 de perdre : le jeu sera équilibré.

### Exercice 3

En vous aidant des propriétés de la fonction exponentielle, répondez en détaillant vos calculs aux questions suivantes :

1. Si  $x > 0$ ,  $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff e^{\sqrt{x} \ln x} = e^{x \ln \sqrt{x}}$  si  $x > 0$  et par croissance de la fonction logarithme népérien  $\sqrt{x} \ln x = x \ln \sqrt{x}$  ou  $\sqrt{x} \ln x = \frac{1}{2} x \ln x \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4$ .

$S = \{4\}$ . (Effectivement :  $4^2 = 2^4$ ).

2. Calculez la limite quand  $x \rightarrow +\infty$  de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}?$$

$$\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \frac{(e^{x \ln x})^x}{e^{x^x \ln x}} = \frac{e^{x(\ln(e^{x \ln x}))}}{e^{x^x \ln x}}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^x} = 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Or  $\ln(e^{x \ln x}) = x \ln x$ , donc le quotient est égal à :  $\frac{e^{x^2 \ln x}}{e^{x^x \ln x}}$

3. Quelle est la solution – si elle existe – de l'équation

$$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \sin^2 x + \cos^2 x \iff e^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \ln x} = 1 \iff e^{\ln(\ln x)} = 1$ , soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

$$\ln(\ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \iff x = e. \quad S = \{e\}$$

#### Exercice 4

Soit la fonction réelle

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

##### Partie A

1.  $\ln x$  existe sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et dans ce cas le dénominateur est non nul :  $\mathcal{D}_f = ]0; +\infty[$ .

2.  $f$  est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ , le dénominateur étant non nul.

$$\text{Sur cet ensemble : } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}. \quad \mathcal{D}_{f'} = ]0; +\infty[.$$

3. Le dénominateur étant positif le signe de  $f'(x)$  est celui du numérateur  $1 - \ln x$  :

$$\bullet \quad 1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff e > x \iff x < e.$$

$f'(x) > 0$  sur l'intervalle  $]0; e[$ , donc  $f$  est croissante sur cet intervalle.

$$\bullet \quad 1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff e < x \iff x > e.$$

$f'(x) < 0$  sur l'intervalle  $]e; +\infty[$ , donc  $f$  est décroissante sur cet intervalle.

$$\bullet \quad 1 - \ln x = 0 \iff x = e : f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1} \text{ est le maximum de } f \text{ sur } ]0; +\infty[.$$

##### Partie B

On considère l'équation

$$n^p = p^n,$$

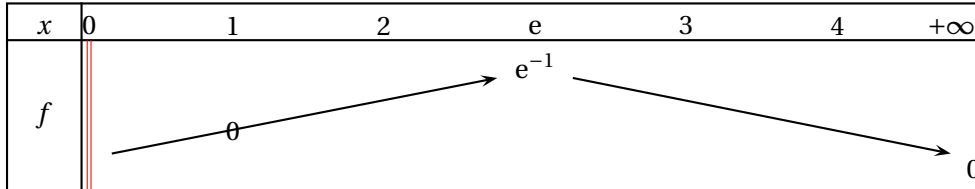
où  $p$  et  $n$  sont des entiers naturels.

1. En utilisant la définition  $a^b = e^{b \ln a}$ , on a :  
 Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $n^p = p^n \iff e^{p \ln n} = e^{n \ln p} \iff p \ln n = n \ln p$  (par croissance de la fonction exponentielle) ou encore  $\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln p}{p}$ .

$\ln(4) = \ln 2^2 = 2 \ln 2$ .

2. Le résultat précédent montre qu'il faut trouver deux naturels ayant la même image par la fonction  $f : f(n) = f(p)$ .

Le tableau de variations de  $f$  :



montre que pour tout réel  $a \in ]0 ; e^{-1}[$ , il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires deux réels  $\alpha \in ]0 ; e[$  et  $\beta \in ]e ; +\infty[$  tels que  $f(\alpha) = f(\beta) = a$ .

Or on cherche des solutions naturelles : entre 0 et e il n'y a que 1 qui est exclu car  $f(1) = 0$  et il n'existe pas de naturel supérieur à e tel son image soit égale à 0.

Il ne reste donc que 2 et  $f(2) = \frac{\ln 2}{2}$ .

Or on a vu que  $\ln 4 = 2 \ln 2$ , donc  $f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{2 \times 2} = \frac{\ln 2}{2}$ .

Conclusion les solutions sont (2 ; 4) ou (4 ; 2). Effectivement  $2^4 = 4^2$ .

**Exercice 5**

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par

$$u_0 = 2, \quad v_n = \frac{2}{u_n} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. *Initialisation :*

- $u_0 = 2$ , donc  $1 \leq u_0 \leq 2$  : l'encadrement est vrai au rang 0 ;
- $v_0 = \frac{2}{2} = 1$ , donc  $1 \leq v_0 \leq 2$  : l'encadrement est vrai au rang 0 ;

*Hérédité :*

- On suppose que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq u_n \leq 2$  (1)  $\iff \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_0} \leq \frac{1}{1} \iff 1 \leq \frac{2}{u_n} \leq 2 \iff 1 \leq v_n \leq 2$  (2).

En sommant les encadrements de nombres positifs (1) et (2), on obtient :

$2 \leq u_n + v_n \leq 4 \iff 1 \leq \frac{u_n + v_n}{2} \leq 2$ , soit finalement  $1 \leq u_{n+1} \leq 2$  : l'encadrement est vrai au rang  $n + 1$ .

- On suppose de même que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq v_n \leq 2$  mais alors comme précédemment on a  $1 \leq u_n \leq 2$  puis d'après le point précédent  $1 \leq u_{n+1} \leq 2$  et en passant aux inverses puis en multipliant par 2, on obtient  $1 \leq v_{n+1} \leq 2$ .

Conclusion : les encadrements sont vrais au rang 0 et s'ils sont vrais au rang  $n$ , ils le sont aussi au rang  $n + 1$ .

D'après le principe de récurrence quel que soit le naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq 2$  et  $1 \leq v_n \leq 2$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 
$$u_{n+1} - v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}^2 - 2}{u_{n+1}} = \frac{\frac{(u_n + v_n)^2}{4} - 2}{\frac{u_n + v_n}{2}}.$$

En remplaçant 2 par  $u_n v_n$  on obtient

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}.$$

3. L'égalité précédente montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - v_{n+1}$  est positif comme quotient de deux termes positifs.

On sait que  $u_0 > v_0$  et on montre facilement par récurrence de  $u_n - v_n > 0$  que  $u_{n+1} - v_{n+1} > 0$ .

Donc  $u_n > v_n$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

4. •  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$  : or on vient de voir que  $u_n > v_n \iff u_n - v_n > 0 \iff v_n - u_n < 0$ , donc  $u_{n+1} - u_n < 0$  ce qui montre que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{u_{n+1}} - \frac{2}{u_n} = \frac{2(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$ .

Or on vient de démontrer que  $u_n - u_{n+1} > 0$  et on sait que  $u_n u_{n+1} > 0$ , donc finalement  $v_{n+1} - v_n > 0$  ce qui montre que la suite  $(v_n)$  est croissante.

5. On a vu que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n - v_n > 0$ , donc on a

$$0 < u_n - v_n \leq \frac{1}{4^n}$$

6. On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ , donc d'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .
7. Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes (l'une est croissante, l'autre décroissante et la limite de leur différence est égale à 0) : elles ont donc la même limite  $\ell$ .

Par continuité la relation  $v_n = \frac{2}{u_n}$ , donne  $\ell = \frac{2}{\ell} \iff \ell^2 = 2 \Rightarrow \ell = 2$  (la solution

$\ell = -\sqrt{2}$  n'est pas valide car la limite est positive).