∽ Corrigé du concours contrôleur des douanes session 2022 ∾

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

Durée : 3 heures

Exercice 1

$$f(t) = 3t\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2.$$

1. $f(0) = 3 \times 0\text{e}^{-\frac{1}{4}\times 0} + 2 = 0 + 2 = 2$.
   Le taux de vasopressine au départ est donc à peu près normal.
2. $f(60) = 3 \times 60\text{e}^{-\frac{1}{4}\times 60} + 2 \approx 2{,}000\,06$.
   Le taux n'est pas normal.
3. $f(12) = 3 \times 12\text{e}^{-\frac{1}{4}\times 12} + 2 \approx 2{,}597$: le taux n'est pas normal.
4. Sur l'intervalle $[0\,;60]$, $f'(x) = 3\text{e}^{-\frac{1}{4}t} - \dfrac{1}{4} \times 3t\text{e}^{-\frac{1}{4}t} = \text{e}^{-\frac{1}{4}t}\left(3 - \dfrac{3t}{4}\right) = \dfrac{3}{4}(4-t)\text{e}^{-\frac{1}{4}t}$.
5. Comme $\dfrac{3}{4}\text{e}^{-\frac{1}{4}t} > 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $4 - t$:
   - $4 - t > 0 \iff t < 4$ sur l'intervalle $[0\,;4]$, $f'(t) > 0$, la fonction f est croissante de $f(0) = 0$ à $f(4) = 12\text{e}^{-1} + 2 \approx 6{,}4$;
   - $4 - t < 0 \iff t > 4$ sur l'intervalle $[4\,;60]$, $f'(t) < 0$, la fonction f est décroissante de $f(4) = 12\text{e}^{-1} + 2 \approx 6{,}4$ à $f(60) = 12\text{e}^{-1} + 2 \approx 2{,}000\,06$.

   Sur l'intervalle $[0\,;4]$, la fonction f est continue car dérivable et strictement croissante de 0 à environ 6,4 : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $t_0 \in]0\,;4[$ tel que $f(t_0) = 2{,}5$.

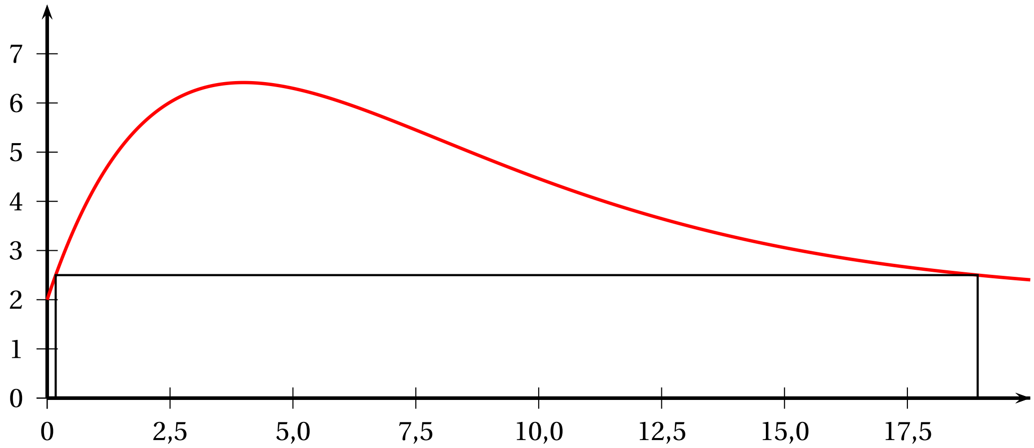
On admettra que $f(t_0) = 2{,}5 \iff t_0 = 0{,}174$ et que de la même façon, il existe une solution unique t_1 telle que $t \in [4\,;+\infty[$ et $f(t_1) = 2{,}5 \iff t_1 = 18{,}93$.

6. Sur l'intervalle $]t_0\,;4]$, $f(t) > 2{,}5$, puis sur l'intervalle $[4\,;t_1[$, $f(t) > 2{,}5$, donc $f(t) > 2{,}5$ sur l'intervalle $]t_0\,;t_1[$.
   Le taux de vasopressine dépasse 2,5 μg/ml entre 0,174 min et 18,93 min.
7. Soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$F(t) = -12(t+4)\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2t$$

   a. La fonction F produit de fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $F'(x) = -12\text{e}^{-\frac{1}{4}t} - \dfrac{1}{4} \times (-12)(t+4)\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 = \text{e}^{-\frac{1}{4}t}[-12 + 3(t+4)] + 2 = \text{e}^{-\frac{1}{4}t}(-12 + 3t + 12) + 2 = 3t\text{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 = f(t)$.
   Conclusion F est une primitive de la fonction f.

   b. Le taux moyen est la moyenne de l'intégrale sur l'intervalle $[t_0\,;t_1]$ de la fonction f soit :
   $\dfrac{1}{t_1 - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\text{d}t = \dfrac{1}{t_1 - t_0}[F(t)]_{t_0}^{t_1} = \dfrac{1}{t_1 - t_0}[F(t_1) - F(t_0)]$.
   On obtient :
   $\dfrac{1}{18{,}93 - 0{,}174}\left[12(4 + 18{,}93)\text{e}^{-\frac{18{,}93}{4}} + 2 \times 18{,}93 + 12(4 + 0{,}174)\text{e}^{-\frac{0{,}174}{4}} - 2 \times 0{,}174\right] \approx 4{,}43$.



Exercice 2

1. G : « le client achète une tablette gagnante »
U : « le client gagne exactement une place de cinéma »
D : « le client gagne exactement deux places de cinéma »

a. L'énoncé donne : $p(G) = 0,5$, $P_G(U) = 0,6$, $P_G(D) = 0,4$.

b. $p(U) = p(G) \times p_G(U) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$.

c.
- on $p(X=0) = \dfrac{1}{2} = 0,5$;
- on $p(X=1) = \dfrac{1}{2} = 0,3$;
- on $p(X=2) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$.

$E(X) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,2 = 0 + 0,3 + 0,4 = 0,7$.

2. Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.

a. À chaque achat il a une chance sur deux de perdre, donc avec deux achats la probabilité est égale à $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

b. C'est la négation de gagner 0 place de cinéma donc le complément à 1 de 0,25 soit 0,75.

c. Il peut gagner soit :
- 0 puis 2 places probabilité $0,5 \times 0,2 = 0,1$;
- 1 puis 1 place probabilité $0,3 \times 0,3 = 0,09$;
- 2 puis 0 places probabilité $0,2 \times 0,5 = 0,1$;

Au total la probabilité de gagner deux places est égale à : $0,1 + 0,09 + 0,1 = 0,29$.

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points

$$\text{A}(0;0;2), \qquad \text{B}(0;4;0) \quad \text{et} \quad \text{C}(2;0;0)$$

1. **a.** $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$, puis $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 0 + 0 + 4 = 4$.

Les points déterminent un plan si les vecteurs ne sont pas colinéaires. En comparant leurs troisièmes composantes le coefficient de colinéarité serait 1, ce qui n'est pas possible pour les autres composantes.

A, B, C déterminent bien un plan.

b. On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 0 + 4 - 4 = 0$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 4 + 0 - 4 = 0$.

Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{u}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est donc normal à ce plan.

c. On sait que :

$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{ABC}) \iff 2x + 1y + 2z + d = 0,\ d \in \mathbb{R}$.

Or $\text{A}(0\ ;\ 0\ ;\ 2) \in (\text{ABC}) \iff 2 \times 0 + 1 \times 0 + 2 \times 2 + d = 0 \iff 4 + d = 0 \iff d = -4$.

Conclusion : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{ABC}) \iff 2x + y + 2z - 4 = 0$.

2. **a.** On a $\text{BA}^2\ |\text{AB}|^2 = 0 + 16 + 4 = 20$.

De même $\text{BC}^2\ |\text{BC}|^2 = 4 + 16 + 0 = 20$.

Donc $\text{BA}^2 = \text{BC}^2 \Longrightarrow \text{BA} = \text{BC}$: le triangle (BAC) est isocèle en B.

b. Si H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC), le vecteur $\overrightarrow{\text{OH}}$ est normal au plan (ABC) donc est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ ci dessus, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{OH}} = \alpha\,\overrightarrow{u}$, donc $\overrightarrow{\text{OH}} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$.

Il en résulte que $\text{H}(2\alpha\ ;\ \alpha\ ;\ 2\alpha)$, mais $\text{H} \in (\text{ABC})$ donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan (ABC) d'où :

$4\alpha + \alpha + 4\alpha - 4 \iff 9\alpha - 4 = 0 \iff \alpha = \dfrac{4}{9}$.

Les coordonnées de H sont donc $\left(2 \times \dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ 2 \times \dfrac{4}{9}\right)$ ou $\text{H}\left(\dfrac{8}{9}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{8}{9}\right)$.

Exercice 4

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

a. On a $p(A) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

b. On a $p(B) = (1 - 0,6) \times 0,9 = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

2. Il y a deux possibilités :

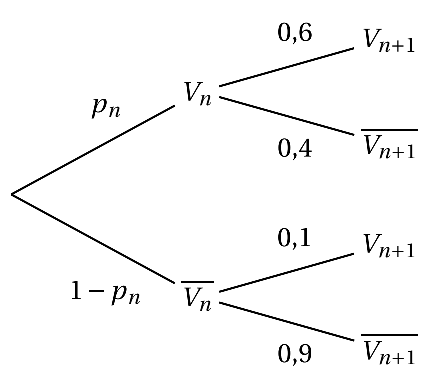
$\text{PP}\overline{\text{P}}$: de probabilité $1 \times 0,6 \times 0,4 = 0,24$;

$\text{P}\overline{\text{P}}\text{P}$ de probabilité $1 \times 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

Donc $p_3 = 0,24 + 0,36 = 0,6$.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier sur votre copie et compléter l'arbre ci-dessous :



4. On a donc d'après l'arbre pondéré ci-dessus :
$p_{n+1} = p_n \times 0,6 + \left(1 - p_n\right) \times 0,1 = 0,6p_n + 0,1 - 0,1p_n = 0,5p_n + 0,1.$

5. On note (u_n) la suite définie, pour tout entier n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5\left(p_n - 0,2\right) = 0,5u_n$.

L'égalité $u_{n+1} = 0,5u_n$, vraie pour tout naturel montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$.

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0,8 \times 0,5^{n-1}$.

Or $u_n = p_n - 0,2 \iff p_n = u_n + 0,2 = 0,8 \times 0,5^{n-1} + 0,2 = p_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 \times 0,5^{n-1} + 0,2$.

c. Comme $0 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8 \times 0,5^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,2$.