∽ Corrigé du concours du 20 mars 2013 ∽

Contrôleur des douanes : surveillance

OPTION A : MATHÉMATIQUES

Remarque préliminaire : Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice nº 1

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{4n-2}{n+2}.$$

1.

$u_0 = -1$	$u_1 \approx 0,67$	$u_2 = 1,5$	$u_3 = 2$
$u_4 \approx 2.33$	$u_5 \approx 2.57$	$u_6 = 2.75$	$u_7 \approx 2.89$
$u_8 = 3$	$u_9 \approx 3.09$	$u_{10} \approx 3.17$	$u_{100} \approx 3.98$

2.
- Pour $n = 0$: $u_0 = -1$, donc $-1 \leqslant u_0 \leqslant 4$;
- Pour $n \geqslant 1$: $4n \geqslant 4 \longrightarrow 4n-2 \geqslant 2 > 0$ et comme $n+2 \geqslant 2 < 0$, le quotient u_n est le quotient de deux termes positifs, donc $u_n > 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4n+8-6}{n+2} = \dfrac{4n+8}{n+2} - \dfrac{6}{n+2} = 4 - \dfrac{6}{n+2}$.

  Comme $\dfrac{6}{n+2} > 0$, on conclut $u_n \leqslant 4$.

  Finalement : pour tout naturel $-1 \leqslant u_n \leqslant 4$.

On dit (remplir les blancs) que la suite (u_n) est minorée par -1 et majorée par 4.

3. On a pour tout naturel $u_{n+1} = \dfrac{4(n+1)-2}{n+1+2} = \dfrac{4n+2}{n+3}$

Puis $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4n+2}{n+3} - \dfrac{4n-2}{n+2} = \dfrac{(4n+2)(n+2)-(4n-2)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{4n^2+8n+2n+4-4n^2-12n+2n+6}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{10}{(n+2)(n+3)}$.

Tous les termes de ce quotient sont supérieurs à zéro, on a donc $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est croissante.

4. Démontrer que, pour n suffisamment grand, on a $u_n > 3,999$. On a $u_n > 3,999 \iff \dfrac{4n-2}{n+2} > 3,999 \iff 4n-2 > 3,999(n+2) \iff 4n-2 > 3,999n + 7,998 \iff 0,001n > 9,998 \iff n > \dfrac{9,998}{0,001} \iff n > 9998$.

Exemple $u_{9\,999} = \dfrac{39\,994}{10\,001} \approx 3,999\,000\,9$.

Que peut-on penser de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

On a vu que $u_n = 4 - \dfrac{6}{n+2}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n+2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6}{n+2} = 0$ et enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

Exercice n^o 2

On considère la fonction f définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$$

1. - $\mathscr{C}_f$ contient A$(0\,;7)$, donc $f(0) = 7 \iff b + 3\ln 1 = 7 \iff b = 7$;
   - La tangente à $\mathscr{C}_f$ en A est horizontale : ceci signifie que $f'(0) = 0$.

   f est une somme de fonctions dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$: elle est donc dérivable sur cet intervalle et
   $f'(x) = a + 3 \times \dfrac{1}{x+1}$ et en particulier $f'(0) = a + 3$.
   Donc $f'(0) = a + 3 = 0 \iff a = -3$.
   Finalement : $f(x) = -3x + 7 + 3\ln(x+1)$.
2. f ayant un extremum en 0 et la fonction étant monotone de part et d'autre de 0, la fonction est :
   soit croissante sur $]-1\ ;\ 0]$ puis décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$,
   soit décroissante sur $]-1\ ;\ 0]$ puis croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** On a $\lim\limits_{x\to-1} -3x + 7 = 10$ et
   $\lim\limits_{x\to-1} \ln(x+1) = -\infty$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$.
   Graphiquement ce résultat signifie que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de -1.

   b. En admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}$.
   On a pour $x \neq 0$, $f(x) = x\left(-3 + \dfrac{7}{x} + 3\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right)$.
   Avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$, donc par somme de limites la parenthèse a pour limite -3 et enfin par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
4. La dérivée a été calculée au-dessus : $f'(x) = -3 + \dfrac{3}{x+1}$.

   On peut vérifier que $f'(x) > 0 \iff -3 + \dfrac{3}{x+1} > 0 \iff \dfrac{3}{x+1} > 3 \iff \dfrac{1}{x+1} > 1 \iff 1 > x + 1 \iff 0 > x$ ou $x < 0$.
   Donc $f'(x) > 0$ sur $]-1\ ;\ 0[$: la fonction f est croissante sur $]-1\ ;\ 0[$ et de même on trouve que f est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   D'où le tableau de variations :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

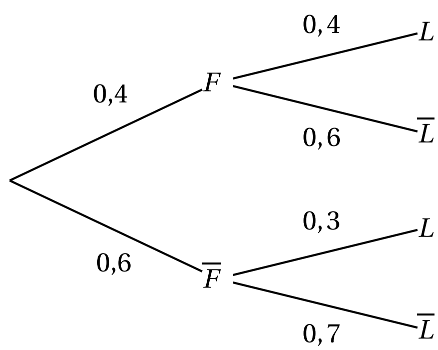
5. On a $g'(x) = 1\ln(x+1) + (x+1) \times \dfrac{1}{x+1} - 1 = \ln(x+1)$.
   De $f(x) = -3x + 7 + 3\ln(x+1)$, on a :

$-3x$ a pour primitive $-\dfrac{3x^2}{2}$;
7 a pour primitive $7x$
$3\ln(x+1)$ a pour primitive $(x+1)\ln(x+1) - x$ (d'après la question précédente)
Donc les primitives de f sont de la forme $-\dfrac{3x^2}{2} + 7x + (x+1)\ln(x+1) - x + K = 6x - \dfrac{3x^2}{2} + (x+1)\ln(x+1) + K$ avec $K \in \mathbb{R}$: la seule de ces primitives s'annulant en 0 est la fonction

$$F(x) = 6x - \frac{3x^2}{2} + (x+1)\ln(x+1).$$

Exercice n[o] 3

Soit F l'évènement « être une femme » et L l'évènement « parler une langue étrangère ; on peut dresser l'arbre pondéré suivant :



1. La probabilité cherchée est :
$p(F \cap L) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$.

2. La probabilité cherchée est :
$p\left(F \cap \overline{L}\right) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.

3. On calcule la probabilité qu'un homme pratique un langue étrangère, soit :
$p\left(\overline{F} \cap L\right) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$.
D'après la loi des probabilités totale, on a :
$p(L) = p(F \cap L) + p\left(\overline{F} \cap L\right) = 0,16 + 0,18 = 0,34$.
Parmi les candidats parlant une langue étrangère, la probabilité d'avoir une femme est :
$p_L(F) = \dfrac{p(L \cap F)}{p(L)} = \dfrac{p(F \cap L)}{p(L)} = \dfrac{0,16}{0,34} = \dfrac{16}{34} = \dfrac{8}{17} \approx 0,47$.