# Corrigé du concours contrôleur des douanes
# Branche surveillance – session 2023

**OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques**

**Remarque préliminaire :**

— **Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.**

— **Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.**

## Exercice 1

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \ln(x).$$

**1.**

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - 1.$$

$g$ différence de produits de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ est également une différence de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Donc sur $\mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1+x)$.
Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $1+x$.

- si $x < -1$, alors $g'(x) < 0$ : la fonction $g$ est décroissante sur $-\infty\,;\,-1[$ ;
- si $x > -1$, alors $g'(x) > 0$ : la fonction $g$ est croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$ ;
- $g'(-1) = 0$ ; $g(-1) = -1\mathrm{e}^{-1} - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1 \approx -1,467$ est le minimum de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$.

- Limite en moins l'infini :

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

- Limite en plus l'infini :

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$,donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

**2.** D'après la question précédente : sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$, $g$ est continue et dérivable et croit strictement de $\approx -1,467$ à plus l'infini.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [-1\,;\,+\infty[$ unique tel que $g(\alpha) = 1$.

**3.** On a $g(\alpha) = 0$, $\quad g(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha]$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty\,;\,]$.

**4.** $f$ fonction différente de deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et
$f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\mathrm{e}^x - 1}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$.

**5.** Comme $x > 0$, le signe de la dérivée est celui du numérateur soit le signe de $g(x)$ trouvé à la question 3.
Donc $f'(x) > 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ et $f$ est croissante sur cet intervalle ; de même $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,\alpha]$ et $f$ est décroissante sur cet intervalle.
Enfin $f(\alpha)$ est le minimum de la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$

**6.** On a vu à la question 2. que $g(\alpha) = 0 \iff \alpha e^{\alpha} - 1 \iff \alpha e^{\alpha} = 1 \iff e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$.

On en déduit par croissance de la fonction logarithme népérien : $\alpha = \ln\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = -\ln\alpha$.

Donc $f(\alpha) = e^{\alpha} - \ln(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} - \ln\alpha = \alpha^{-1} + \alpha$.

## Exercice 2

### Partie A

S pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $g(t) \geqslant f(t) \iff g(t) - f(t) \geqslant 0$ donc d'après la propriété ci-dessus (positivité de l'intégrale) $\displaystyle\int_a^b [g(t) - f(t)]\,dt \geqslant 0 \iff \int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0 \iff \int_a^b g(t)\,dt \geqslant \int_a^b f(t)\,dt$.

### Partie B

Soit $n$ un entier naturel non nul. On appelle $f_n$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \ln\left(1 + x^n\right)$$

et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + x^n\right)\,dx$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

**1.** **a.** $f_1(x) = \ln(1+x)$ On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+x = +\infty$ et enfin $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$.

**b.** $f_1$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle $f_1'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

omme $1 + x \geqslant 1 > 0$, on a $f_1'(x) > 0$ : la fonction est (strictement) croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de $\ln 1 = 0$ à plus l'infini.

**c.** $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

On pose $\left\{\begin{array}{lclccl} u(x) & = & \ln(1+x) & dv & = & dx \\ du(x) & = & \dfrac{1}{1+x} & v & = & x \end{array}\right.$

On intègre par parties : $I_1 = [x\ln(1+x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x}{1+x}\,dx$.

Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x}{1+x}\,dx$.

On a $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{x+1-1}{1+x} = \dfrac{x+1}{1+x} - \dfrac{1}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

Donc $J = \displaystyle\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \dfrac{1}{x+1}\,dx = [x]_0^1 - [\ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln 2$.

Finalement $I = 1\ln 2 - (1 - \ln 2) = 2\ln 2 - 1$.

**2.** **a.** On intègre entre 0 et 1, donc :

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant x^n \leqslant 1 \Longrightarrow 1 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2 \Longrightarrow \ln 1 \leqslant \ln(1 + x^n) \leqslant \ln 2$ et en intégrant ces trois fonctions entre 0 et 1 :

$0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln 2\,dx$, soit $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2 < \ln e = 1$ et finalement $0 \leqslant I_n \leqslant 1$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

**b.** On sait que pour $x \leqslant x \leqslant 1$, la suite $(x^n)$ est décroissante, donc $x^{n+1} < x^n \Longrightarrow 1+x^{n+1} < 1+x^n \Longrightarrow \ln\left(1+x^{n+1}\right) < \ln(1+x^n) \Longrightarrow I_{n+1} < I_n$ : la suite $(I_n)$ est décroissante.

**c.** Les intégrales $I_n$ sont positives car intégrales de fonctions positives ; elles sont donc minorées par 0.

Conclusion : minorée par zéro et décroissante la suite $(I_n)$ est convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

**3.**

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

**a.** Différence de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$, la fonction $g$ est dérivable sur cet intervalle et :

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{1-(1+x)}{1+x} = \dfrac{-x}{1+x}$ qui est du signe de $-x$ car $1+x \geqslant 1 > 0$, quel que soit $x \in ]0~;~+\infty[$.

Comme $x \geqslant 0, -x \leqslant 0$ ; la dérivée est négative, la fonction $g$ est décroissante (strictement) sur $[0~;~+\infty[$.

**b.** $g$ décroit de $g(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$ à $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$

En écrivant $g(x) = x\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1\right]$, on voit que :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1\right] = -1$ et par produit de limites :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Conclusion : quel que soit $x \in [0~;~+\infty[$, alors $g(x) = \ln(1+x) - x \leqslant 0 \iff \ln(1+x) \leqslant x$.

Or quel que soit $x \in [0~;~+\infty[$, il existe $X \in [0~;~+\infty[$ tel que $x = X^n$ et on a donc $\ln(1+X^n) \leqslant X^n$ pour $X \in [0~;~+\infty[$.

En remplaçant l'étiquette $X$ par $x$ on a l'inégalité demandée.

**c.** Le résultat précédent $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$ entraîne que $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$, soit :

$I_n \leqslant \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ et enfin $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes (puisque $I_n \geqslant 0$), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

## Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout} \quad n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

**1.** $u_1 = \dfrac{1}{3} + 0 - 2 = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3}$ ;

$u_2 = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{5}{3}\right) + 1 - 2 = -\dfrac{5}{9} - 1 = -\dfrac{14}{9}$ ;

$u_3 = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{14}{9}\right) + 2 - 2 = -\dfrac{14}{27}$.

**2.** **a.** Par récurrence :

*Initialisation* On a pour $n = 4$ :

$u_4 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{25}{27} + 4 - 2 = \dfrac{25}{81} + 2 = \dfrac{25+162}{81} = \dfrac{187}{81} \geqslant 0 =$ la relation est vraie au rang 4.

*Hérédité* :

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 4$ tel que $u_n \geqslant 0$, alors d'une part $n \geqslant 4 \Longrightarrow n-2 \geqslant 2$ et

$u_n \geqslant 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{3}u_n \geqslant 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant 2 \geqslant 0$, soit $u_{n+1} \geqslant 0$ : la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 4 et si elle est vraie à un rang supérieur ou égal à 4 elle est vraie au rang suivant : d'après le principe de récurrence si $n \geqslant 4$, alors $u_n \geqslant 0$.

**b.** Pour $n \geqslant 5$, $u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2$ ; or si $n \geqslant 5$, $n-1 \geqslant 4$ et $u_{n-1} \geqslant 0$, donc

$u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + (n-1) - 2 \geqslant (n-1) - 2$ ou encore $u_n \geqslant n-3$.

**c.** Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty$ le résultat précédent montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**3.** On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}.$$

**a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \dfrac{21}{2} = -2\left(\dfrac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - 2 = \dfrac{1}{3}(-2u_n) - 2n + 4 + 3n + 3 - \dfrac{21}{2} = \dfrac{1}{3}(-2u_n) + n + 7 - \dfrac{21}{2} = \dfrac{1}{3}(-2u_n) + n - \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}\right) = \dfrac{1}{3}v_n$ :

La relation vraie pour tout naturel $n$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$ montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2u_0 - \dfrac{21}{2} = -2 - \dfrac{21}{2} = -\dfrac{25}{2}$.

**b.** On sait que le terme général de la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$est :

$v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = -\dfrac{25}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et en utilisant la définition de $v_n$ :

$2u_n = -v_n + 3n - \dfrac{21}{2} = \dfrac{25}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 3n - \dfrac{21}{2} \iff u_n = \dfrac{25}{4} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.

**c.** Soit la somme $S_n$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Soit $s_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$ ;

En multipliant par $\dfrac{1}{3}$, on obtient $\dfrac{1}{3}s_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$ puis par différence entre les deux dernières expressions :

$\dfrac{2}{3}s_1 = \dfrac{25}{4}\left(1 - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$. En multipliant par $\dfrac{3}{2}$, $\quad s_1 = \dfrac{75}{8}\left(1 - \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$

Soit $s_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2}k = \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{4}$.

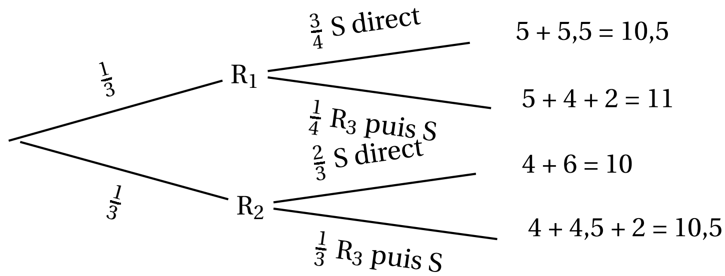
Enfin soit $s_3 = \sum_{k=0}^{n} -\frac{21}{4} = -\frac{21}{4}(n+1)$.

Donc $S_n = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{75}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3n(n+1)}{4} - \frac{21}{4}(n+1)$.

$S_n = \frac{75}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3(n+1)(n-7)}{4}$.

## Exercice 4

**1.**




**2.** $p\left(\mathrm{E}_1\right) = p_{\mathrm{R}_1}\left(\mathrm{R}_3\right) = 1 - p_{\mathrm{R}_1}(\text{S direct}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

L'évènement $\mathrm{E}_2$ ou $\mathrm{R}_3$ est la réunion des évènements disjoints $\mathrm{R}_3 \cap \mathrm{R}_1$ et $\mathrm{R}_3 \cap \mathrm{R}_2$ ;

$p\left(\mathrm{E}_2\right) = p\left(\mathrm{R}_3 \cap \mathrm{R}_1\right) + p\left(\mathrm{R}_3 \cap \mathrm{R}_2\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{9} = \frac{3+8}{36} = \frac{11}{36}$.

$p\left(E_3\right) = p_{\mathrm{R}_3}\left(\mathrm{R}_1\right) = \frac{p\left(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_3\right)}{p\left(\mathrm{R}_3\right)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{36}} = \frac{3}{11}$.

$p\left(E_4\right) = p_{\text{S direct}}\left(\mathrm{R}_2\right) = \frac{p\left(\text{S direct} \cap \mathrm{R}_2\right)}{p(\text{S direct})}$.

Or $p(\text{S direct}) = p(\text{S direct}\cap\mathrm{R}_1) + p(\text{S direct}\cap\mathrm{R}_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{3}{12} = \frac{16+9}{36} = \frac{25}{36}$.

Donc $p\left(E_4\right) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{25}{36}} = \frac{4}{9} \times \frac{36}{25} = \frac{16}{25}$.

**3.** **a.** On a $p(X = 10) = p\left(\mathrm{R}_2 \cap \text{S direct}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

$p(X = 11) = p\left(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_3\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

$p(X = 10,5) = p\left(\mathrm{R}_1 \cap \text{S direct}\right) + p\left(\mathrm{R}_2 \cap \mathrm{R}_3\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{17}{36}$.

**b.** $E(X) = 10 \times \frac{4}{9} + 11 \times \frac{1}{12} + 10,5 \times \frac{17}{36} = \frac{371,5}{36} \approx 10,3194\ldots$ soit 10,32 au centième près.