Corrigé du baccalauréat de technicien hôtellerie Métropole 20 juin 2017

EXERCICE 1 **10 points**

La société Alima-Conseil est un cabinet d'experts spécialiste du marché de la consommation alimentaire hors domicile en France. Elle est régulièrement consultée sur les modes de consommation et l'évolution du secteur de la restauration.
En particulier, elle a étudié deux marchés importants de la restauration rapide en France : celui du burger et celui du traditionnel sandwich jambon-beurre.

Partie A : marché du burger

Le tableau ci-dessous présente l'évolution de la consommation de burgers par les Français entre 2012 et 2015.

Année	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4
Nombre de burgers consommés (en milliard) : y_i	0,92	0,97	1,07	1,19

1. Calculons le pourcentage d'augmentation du nombre de burgers consommés entre 2014 et 2015.
   Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \dfrac{1,19-1,07}{1,07} \approx 0,112\,15$
   Le pourcentage d'augmentation du nombre de burgers consommés entre 2014 et 2015 est, arrondi à 10^{-2}, de 11,22 %
2. Le nuage de points de coordonnées $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ est donné en **annexe (à rendre avec la copie)**.
   On note G le point moyen de ce nuage.
   a. Déterminons les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points et plaçons-le dans le repère précédent.
   Le point moyen est le point G de coordonnées $(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$.

$$\overline{x}_G = \dfrac{1+2+3+4}{4} = 2,5 \qquad \overline{y}_G = \dfrac{0,92+0,97+1,07+1,19}{4} = 1,037\,5$$

   G (2,5 ; 1,037 5)

   On décide de réaliser un ajustement affine du nuage de points par la droite D passant par G et d'équation réduite $y = ax + 0,81$, où a est un nombre réel.

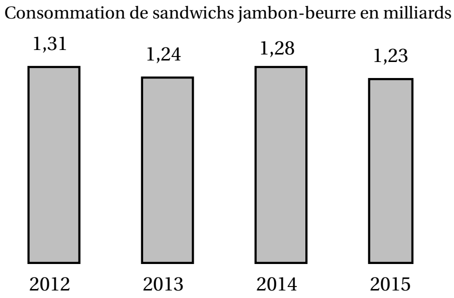
   b. Déterminons la valeur du coefficient directeur a de la droite D.
   Écrivons que la droite passe par G. $1,037\,5 = 2,5a + 0,81$ d'où $a = \dfrac{1,037\,5 - 0,81}{2,5} = 0,091$.
   Une équation de la droite D est $y = 0,091x + 0,81$
   c. La droite D est tracée sur le graphique de l'**annexe**.
3. On admet que cet ajustement reste valable jusqu'en 2019.
   a. Donnons une estimation du nombre de burgers consommés durant l'année 2016.
   En 2016 $x = 5$. En remplaçant x par cette valeur dans l'équation de la droite nous obtenons $y = 0,091 \times 5 + 0,81 = 1,265$.
   Une estimation possible, selon ce modèle, de la consommation de burgers en France en 2016 est de 1,265 milliard.
   b. Déterminons au cours de quelle année nous pouvons prévoir que le nombre de burgers consommés en France dépassera 1,5 milliard.
   Pour ce faire, résolvons l'inéquation $0,091x + 0,81 > 1,5$

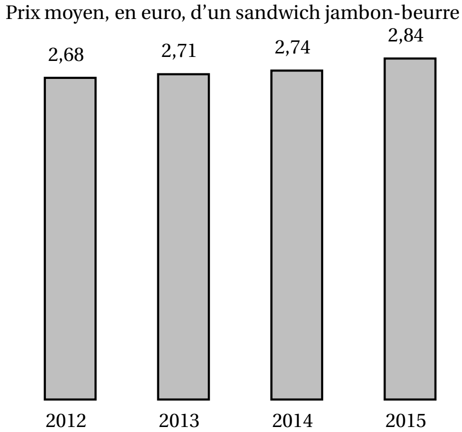
$$0,091x + 0,81 > 1,5 \qquad 0,091x + > 1,5 - 0,81 \qquad 0,091x > 0,69 \qquad x > \dfrac{0,69}{0,091} \qquad x > 7,58$$

   À $x = 8$ correspond l'année 2019, par conséquent nous pouvons prévoir, selon ce modèle, qu'au cours de l'année 2019, la consommation de burgers dépassera 1,5 milliard.

Partie B : marché du sandwich jambon-beurre

Les deux graphiques ci-dessous donnent, pour l'un, le nombre de sandwichs jambon-beurre consommés en France et, pour l'autre, le prix moyen d'un sandwich jambon-beurre de 2012 à 2015.





1. Calculons le chiffre d'affaires réalisé dans ce secteur de la restauration en 2015.
   Le chiffre d'affaires est le produit du prix unitaire par la quantité. Pour 2015, nous lisons un prix de 2,84 et une quantité de 1,23 milliard.
   $2{,}84 \times 1{,}23 = 3{,}493\,2$. Le chiffre d'affaires est donc d'environ 3,49 milliards d'euros.
2. Entre 2012 et 2015, la consommation de sandwichs jambon-beurre est passée de 1,31 milliard à $1,23$ milliard. Elle a donc baissé en moyenne de 2 % par an.
   On admet que cette baisse de 2 % par an se poursuit au-delà de l'année 2015.
   On modélise alors le nombre de sandwichs jambon-beurre consommés chaque année à partir de 2015 par une suite géométrique (u_n).
   On note u_n le nombre de sandwichs jambon-beurre, en milliard, consommés l'année $2015 + n$. Par conséquent, $u_0 = 1,23$.
   a. À un taux d'évolution de t % correspond un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{t}{100}$.
   À une baisse de 2 % correspond un coefficient multiplicateur de 0,98. $u_1 = u_0 \times 0{,}98$ d'où $u_1 = 1{,}23 \times 0{,}98 = 1{,}205\,4$.
   b. Exprimons u_n en fonction de n.
   Passant d'un terme au suivant en le multipliant par un même nombre, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,98 et de premier terme 1,23.
   Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.
   $u_n = 1{,}23 \times (0{,}98)^n$.
   c. Selon ce modèle, déterminons combien de sandwichs jambon-beurre seront consommés en 2018. En 2018, $n = 3$ par conséquent $u_3 = 1{,}23 \times (0{,}98)^3 \approx 1{,}157\,7$.
   Selon ce modèle, le nombre de sandwichs jambon-beurre consommés en 2018 serait d'environ 1,16 milliards.

Partie C

Le directeur de la société Alima-Conseil affirmait en 2015 : « Pour la première fois en 2016, on consommera en France plus de burgers que de sandwichs jambon-beurre ».
Les deux études précédentes confirment ce propos. En effet nous avons montré, selon le modèle considéré, que le nombre de burgers consommés en 2016, en milliard, était de 1,265 tandis que le nombre de sandwichs jambon-beurre consommés, selon le modèle envisagé, n'était en milliard, que de 1,205 4.

EXERCICE 2 **10 points**

On a mesuré expérimentalement, sur une durée fixée, le taux d'évolution du nombre de bactéries d'un type donné présentes dans un milieu à différentes températures. La courbe figurant en **annexe** modélise ce taux d'évolution (en pourcentage) en fonction de la température (en degré Celsius) pour des valeurs comprises entre −5°C et 43°C.

Partie A : lecture graphique.

À l'aide du graphique fourni en annexe,

1. Une température du milieu maintenue entre 2 °C et 8 °C ne permet pas de limiter le développement de ce type de bactéries puisque la fonction est croissante sur cet intervalle.

2. Le taux d'évolution de ce type de bactéries est supérieur ou égal à 60 % lorsque la température est comprise entre 30,1 °C et 41 °C, ces valeurs incluses. Nous lisons les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 60$. Nous trouvons avec la précision permise par le graphique 30,1 et 41. Ces valeurs sont les bornes de l'intervalle et puisque entre ces deux valeurs la courbe est située au dessus de la droite, nous avons donc l'intervalle [30,1 ; 41].

3. Nous pouvons estimer qu'à partir de 37 °C ce type de bactéries ne se développe plus. Nous lisons l'abscisse du maximum de la fonction.

4. On peut classer les bactéries selon les températures auxquelles elles se développent.

— Les **bactéries thermophiles** continuent à se développer à des températures supérieures ou égales à 45 °C.

— Les **bactéries mésophiles** préfèrent les températures comprises entre 20 et 40 °C.

— Les **bactéries psychrophiles** ont une température optimale de développement voisine de 0 °C.

Le graphique de l'annexe semble correspondre aux bactéries mésophiles puisque nous avons estimé que la température maximale pour laquelle le développement est maximal se situait aux environs de 37 °C. Cette affirmation contredit le développement des bactéries thermophiles qui prolifèrent à des températures supérieures à 45 °C, ainsi que le développement des bactéries psychrophiles qui s'épanouissent à des températures proches de 0 °C.

Partie B : étude d'un modèle mathématique.

On considère que la courbe figurant en **annexe** représente, sur l'intervalle [−5 ; 43], la fonction f définie par

$$f(x) = (-1,4x + 59)\mathrm{e}^{0,2x-4,75}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [−5 ; 43].
On note f' sa fonction dérivée et on admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle [−5 ; 43],

$$f'(x) = (-0,28x + 10,4)\mathrm{e}^{0,2x-4,75}.$$

1. Déterminons le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [−5 ; 43].
Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{0,2x-4,75} > 0$ par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $-0,28x + 10,4$.
Sur $\mathbb{R}$, $-0,28x + 10,4 > 0 \iff x < \dfrac{10,4}{0,28} \quad x < \alpha \quad \alpha \approx 37,1429.$
Il en résulte :
Si $x \in [-5\,;\,\alpha[$, $f'(x) > 0$ et si $x \in]\alpha\,;\,43]$, $f'(x) < 0$.

2. **a.** La fonction f admet un maximum sur l'intervalle [−5 ; 43] pour $x = \alpha$ puisque f est strictement croissante sur $[-5\,;\,\alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha\,;\,43]$, la fonction f' étant sur ces intervalles positive puis négative.

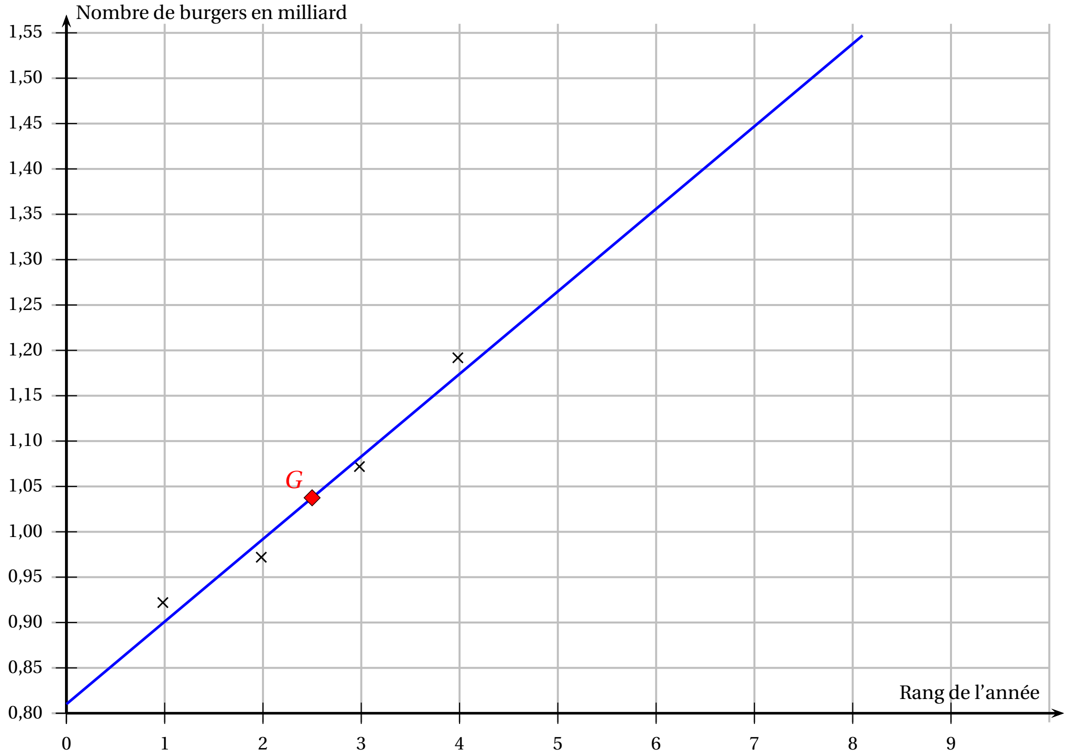
b. Le taux d'évolution de ce type de bactéries est maximal pour une température d'environ 37,1 °C

3. Résolvons l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle [−5 ; 43].
Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{0,2x-4,75} > 0$ par conséquent cela revient à résoudre $-1,4x + 59 = 0$ d'où $x = \dfrac{59}{1,4} \approx 42,14$.
L'ensemble solution de l'équation sur [−5 ; 43] est {42,14}.
Nous pouvons interpréter cette solution obtenue dans le contexte du développement de ce type de bactéries comme la température à laquelle le taux d'évolution de ce type de bactéries est nul ni augmentation ni régression.

4. $f(42,6) \approx -27,76$, par conséquent ce nombre réel est négatif. Nous pouvons dire que le taux d'évolution de ce type de bactéries est négatif, par conséquent le nombre de bactéries régresse.

Annexe à remettre avec la copie

Exercice 1



Exercice 2