∽ Baccalauréat de technicien hôtellerie ∽
Métropole septembre 2017

EXERCICE 1 **9 points**

Afin de suivre les directives concernant l'information sur les allergènes, un restaurant a répertorié deux allergènes pouvant être contenus dans les petits fours servis en mise en bouche : les fruits de mer et le gluten.
Parmi les petits fours servis :

— 40 % contiennent des fruits de mer; soit 60 % ne contiennent pas de fruits de mer.

— les trois cinquièmes des petits fours contenant des fruits de mer contiennent aussi du gluten; soit $0,40 \times \dfrac{3}{5} = 0,24$

— les quatre cinquièmes des petits fours sans fruit de mer contiennent du gluten. soit $0,60 \times \dfrac{4}{5} = 0,48$

1. Nous avons complété le tableau donné en **annexe, à rendre avec la copie.**
2. « Plus de 80 % des petits fours contiennent au moins un allergène ». Cette affirmation est vraie car seulement 12 % des petits fours n'ont aucun allergène. $1 - 0,12 = 0,88$ par conséquent 88 % des petits fours contiennent au moins un allergène.

On choisit au hasard un petit four. On admet que chacun a la même probabilité d'être choisi.
On note : G l'évènement : « le petit four contient du gluten » ;
F l'évènement : « le petit four contient des fruits de mer ».

3. **a.** $\overline{F} \cup G$ est l'évènement « le petit four ne contient pas de fruits de mer ou contient du gluten ».
Calculons sa probabilité. $p\left(\overline{F} \cup G\right) = p\left(\overline{F}\right) + p(G) - p\left(\overline{F} \cap G\right) = 0,60 + 0,72 - 0,48 = 0,84$.

   b. L'évènement « le petit four choisi ne contient ni fruit de mer ni gluten » se note $\overline{F} \cap \overline{G}$.
Déterminons sa probabilité. $p\left(\overline{F} \cap \overline{G}\right) = 0,12$.

   c. L'évènement contraire de l'évènement de la question **3.b.** précédente est : « le petit four choisi contient des fruits de mer ou du gluten ». Sa probabilité est donc 0,88.
remarque c'est la question 2 posée différemment.

4. Le petit four choisi contient du gluten. Calculons la probabilité qu'il contienne aussi des fruits de mer.
Cette probabilité est notée $p_G(F)$. $p_G(F) = \dfrac{p(F \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0,24}{0,72} = \dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 2 **11 points**

Une restauratrice vient d'acheter un nouveau piano de cuisson d'une valeur de 21 000 €. On étudie l'évolution de la valeur de ce piano de cuisson sur une durée de quinze ans.
On considère la fonction f définie sur $[0 ; 15]$ par $f(x) = 21\,000\,\text{e}^{-0,24x}$.
Sa représentation graphique dans un repère orthogonal est donnée **en annexe, à rendre avec la copie.**
On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; 15]$ et on note f' sa fonction dérivée.
On admet que, pour les valeurs entières de x, $f(x)$ représente la valeur du piano de cuisson, en euros, au bout de x années d'utilisation.

Partie A

1. Résolvons graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 8\,000$. Traçons la droite d'équation $y = 8\,000$ et lisons l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe. Avec la précision permise par le graphique, nous obtenons $x \approx 4$. L'ensemble solution de l'inéquation est l'ensemble des abscisses des points pour lesquels la courbe est située « au-dessus » de la droite. $\mathscr{S} = [0 ; 4]$. Cet intervalle peut être interprété comme le temps pendant lequel la valeur du piano est supérieure à 8 000 €.
2. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; 15]$ puisque sur cet intervalle la fonction dérivée est strictement négative.
En effet $f'(x) = 21\,000 \times (-0,24\,\text{e}^{-0,24x}) = -5\,040\text{e}^{-0,24x}$ et $f'(x) < 0$ comme produit d'un nombre réel strictement négatif $(-5\,040)$ et d'un nombre réel strictement positif $\left(\text{e}^{-0,24x}\right)$.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 2000$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;15]$.

Appliquons ce théorème :

Si f est dérivable sur $[a\,;\,b]$ où $a < b$ et si f' est à valeurs strictement négatives sur $]a\,;\,b[$ alors f est strictement décroissante sur $[a\,;\,b]$ et pour tout élément λ de $[f(b)\,;\,f(a)]$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a\,;\,b]$.

La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,15]$ et f' est à valeurs strictement négatives sur $]0\,;\,15[$ alors f est strictement décroissante sur $[0\,;\,15]$ et $2000 \in [\approx 573{,}798\,;\,21000]$ l'équation $f(x) = 2000$ admet une solution unique α dans $[0\,;\,15]$.

À l'aide de la calculatrice, arrondi à l'unité $\alpha \approx 10$

4. Ce résultat dans le contexte étudié peut être interprété comme le nombre d'années au bout desquelles la valeur du piano est de 2 000 €.

Partie B

1. La valeur du piano de cuisson au bout de sept années d'utilisation est $f(7)$.

$f(7) = 21000\,\text{e}^{-0{,}24\times 7} = 21000\,\text{e}^{-1{,}68}$ soit à l'euro près 3 914.

2. Calculons le pourcentage d'évolution entre le prix d'achat et la valeur du piano de cuisson au bout de sept années d'utilisation.

Le taux d'évolution $\mathcal{T}$ est défini par $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$.

$\mathcal{T} = \dfrac{3914 - 21000}{21000} \approx -0{,}8136$.

Le pourcentage d'évolution entre le prix d'achat et la valeur du piano de cuisson au bout de sept années d'utilisation est d'environ $-81{,}36\,\%$.

3. La restauratrice affirme : « au bout de 10 ans, le piano de cuisson a perdu 90 % de sa valeur d'achat ».

Calculons sa valeur au bout de 10 ans $f(10) \approx 1905$. Le taux d'évolution est alors $\dfrac{1905 - 21000}{21000} \approx -0{,}9093$ soit $-90{,}93\,\%$ par conséquent la restauratrice a raison.

remarque Si le piano perd 90 % de sa valeur alors il vaut $21000 \times (1 - 0{,}9)$ soit 2 100 or nous avons montré qu'au bout de 10 ans il valait environ 2 000, elle a donc raison

4. La restauratrice veut récupérer au moins 1 000 € à la revente de son piano de cuisson.

Pour déterminer, pendant combien d'années au maximum elle peut l'utiliser, résolvons $f(x) = 1000$.

$$\begin{aligned} 21000\,\text{e}^{-0{,}24x} &= 1000\\ \text{e}^{-0{,}24x} &= \frac{1}{21}\\ \text{e}^{0{,}24x} &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0{,}24x &= \ln 21\\ x &= \frac{\ln 21}{0{,}24}\\ x &\approx 12{,}69 \end{aligned}$$

La restauratrice pourra l'utiliser au maximum pendant 12 ans si elle veut récupérer au moins 1 000 €.

Annexe à remettre avec la copie

EXERCICE 1

Tableau de fréquences (en %)	Petits fours avec fruits de mer	Petits fours sans fruits de mer	**Fréquences totales (en %)**
Petits fours avec gluten	24 %	48 %	72 %
Petits fours sans gluten	16 %	12 %	28 %
Fréquences totales (en %)	40 %	60 %	100 %

EXERCICE 2