∽ Corrigé du concours contrôleur des douanes ∾

20 novembre 2023

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

Durée : 3 heures

Exercice 1

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2+12x+18}{x^2+3}.$$

1. On a quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\;: x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2+3 \geqslant 3$.
   Le dénominateur de $f(x)$ n'est pas nul, donc $f(x)$ est définie pour tout réel. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. f est un quotient de fonctions polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$ le dénominateur étant non nul; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{4x+12)\left(x^2+3\right)-2x\left(2x^2+12x+18\right)}{\left(x^2+3\right)^2} = \dfrac{4x^3+12x+12x^2+36-4x^3-24x^2-36x}{\left(x^2+3\right)^2} =$
   $\dfrac{-12x^2-24x+36}{\left(x^2+3\right)^2} = \dfrac{12\left(-x^2-2x+3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$.
3. Comme $12>0$ et $x^2+3 \geqslant 3 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2-2x+3$.
   Celui-ci a une racine évidente 1 et le produit des racines étant égal à $\dfrac{c}{a} = -3$, l'autre racine est égale à -3.
   On sait que ce trinôme est négatif (du signe de $a=-1$), sauf entre les racines -3 et 1.
   Le trinôme et donc la dérivée sont positifs sur $[-3\,;\,1]$ et négatifs ailleurs.
   La fonction f est donc :
   - croissante sur $[-3\,;\,1]$;
   - décroissante sur $]-\infty\,;\,-3]$ et sur $[1\,;\,+\infty[$.

   Limites de f au voisinage de l'infini :
   En écrivant $f(x) = \dfrac{x^2\left(2+\frac{12}{x}+\frac{18}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \dfrac{2+\frac{12}{x}+\frac{18}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}$ (avec $x^2 \neq 0$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{x^n}$, $(a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}) = 0$, on obtient :
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} = 2$.
   La droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale à C au voisinage de l'infini.
   $f(-3) = \dfrac{18-36+18}{12} = 0$ et $f(1) = \dfrac{2+12+18}{1+3} = \dfrac{32}{4} = 8$.
   D'où le tableau :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	2	↘	0	↗	8	↘	2

4. f a deux extremums locaux : $f(-3) = 0$ et $f(1) = 8$.
5. On sait que si (T) est la tangente à la courbe représentative de cette fonction au point d'abscisse 0 alors :
$M(x\,;\,) \in (T) \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
Avec $f(0) = \dfrac{18}{3} = 6$ et $f'(0) = \dfrac{36}{3^2} = 4$, on a alors :
$M(x\,;\,) \in (T) \iff y - 6 = 4x \iff y = 4x + 6$.

Exercice 2

On considère un entier naturel n et les fonctions

$$f(x) = (1+x)^n \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 + nx$$

1. On peut faire une démonstration par récurrence.
Autre méthode :
   - Si $n = 0$, $\;(1+x)^0 = 1$ et $1 + nx = 1 + 0$. On a bien $1 + x)^0 \geqslant 1 + 0x$
   - Soit donc $n \geqslant 1$ et soit h la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x) = n(1+x)^n - (1+nx)$.

   Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - 1$.
   On a $1 \geqslant 1 \Longrightarrow 1 + x \geqslant 1\ (x > 0), \Longrightarrow (1+x)^{n-1} \geqslant 1^{n-1}$, soit $(1+x)^{n-1} \geqslant 1$ et puisque $n - 1 \geqslant 0$, $\;n(1+x)^{n-1} \geqslant 1$ ou encore $n(1+x)^{n-1} - 1 \geqslant 0$.
   Comme $h'(x) \geqslant 0$, h est croissante; comme $h(0) = 0$, on a donc pour $x > 0, h(x) \geqslant h(0) = 0$, soit $n(1+x)^n - (1+nx) \geqslant 0 \iff n(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
2. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $q > 1$; Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $q = 1 + x$, d'où $q^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$, d'après la question précédente.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty$ et par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+x)^n = q^n = +\infty$.
Étudier la limite de la suite (u_n).
3. $0 < q < 1 \Longrightarrow 1 < \dfrac{1}{q} \iff 1 < p$, avec $p = \dfrac{1}{q}$.
D'après la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \quad \text{et} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3} \text{ pour tout entier naturel } n, \end{array}\right.$$

On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par la relation

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

1. • On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3} - u_n = \dfrac{2u_n + 2 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 3} = \dfrac{(u_n - 1)(-u_n - 2)}{u_n + 3}$.
Or $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{2}{3}$,donc cette suite n'est pas constante donc la différence $u_{n+1} - u_n$ non plus et la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
• Comme $u_1 = \dfrac{2}{3}$ et $u_0 = 0$, il n'existe pas $q \in \mathbb{R}$ tel que $u_1 = u_0 \times q$: la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

3. On a $v_{n+1}\dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \dfrac{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} - 1}{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} + 2} = \dfrac{2u_n + 2 - u_n - 3}{2u_{n+2} + 2 + 2u_n + 6} = \dfrac{u_n - 1}{4u_n + 8} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} = \dfrac{1}{4}v_n.$

Pour tout naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

4. On sait que si $n \in \mathbb{N}$, alors $v_n = v_0 \times q^n$, q étant la raison.

On a donc $v_n = -\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

5. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ car $0 < \dfrac{1}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

6. On a par définition $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} \iff v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \iff$

$u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \iff u_n = \dfrac{-2v_n - 1}{1 - v_n} = \dfrac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$.

7. On a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + 2v_n}{1 - v_n} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Exercice 4

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I

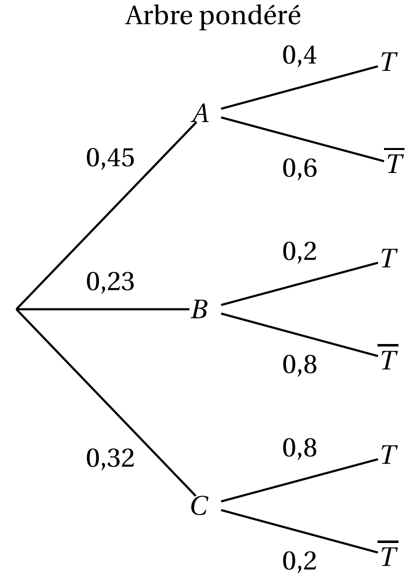
1. **a.** Il y a dans l'entreprise : $450 + 230 + 320 = 450 + 550 = 1\,000$employés.

Donc $p(A) = \dfrac{450}{1\,000} = 0,450$.

b. Parmi les employés du service A, 40 % résident à moins de 30 minutes de l'entreprise, donc $p_A(T) = \dfrac{40}{400} = 0,4$.

c.

Arbre pondéré



2. Il faut trouver $p(A \cap T) = p(A) \times p_A(T) = 0,45 \times 0,4 = 0,18$.
3. De même $p(B \cap T) = 0,23 \times 0,2 = 0,046$;
   $p(C \cap T) = 0,32 \times 0,8 = 0,256$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(T) = p(A \cap T) + p(B \cap T) + p(C \cap T) = 0,18 + 0,046 + 0,256 = 0,482$.

Pour la question 4, le candidat ne donnera pas de valeur calculée approchée. Le résultat sera présenté sous forme de fraction.

4. Il faut trouver $p_{\overline{T}(C)} = \dfrac{p\left(\overline{T} \cap C\right)}{p\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{p_C\left(\overline{T}\right) \times p(C)}{1 - p(T)} = \dfrac{0,2 \times 0,32}{1 - 0,482} \approx 0,124$.
5. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'employés résidant à moins de 30 minutes de leur lieu de travail parmi les 5 employés interrogés.
   La variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,482$.
   On a $p(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,482^2 \times (1 - 0,482)^3 \approx 0,3229$ soit environ 0,323.

Partie II

L'amplitude de l'intervalle de confiance à 95 % est égal à $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$, n étant le nombre de personnes consultées.

On doit donc avoir $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0,15 \iff \dfrac{2}{0,15} < \sqrt{n} \iff n > \left(\dfrac{2}{0,15}\right)^2$.

Or $\left(\dfrac{2}{0,15}\right)^2 \approx 177,7$.

Il faut consulter au moins 178 employés.