∽ Corrigé du concours de contrôleur des douanes 27 février 2012 ∾

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Exercice 1 (voir dans Concours branche surveillance 2015)

On considère (u_n) et (v_n),deux suites définies par $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad \text{et} \quad v_n = u_n + 6$$

1. • Arithmétique ?

Calculons $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + 6 - u_n = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n$.

Or $u_0 = 9$ et $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$: la suite (u_n) n'est pas constante, la différence $v_{n+1} - v_n$ non plus donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

• Géométrique ?

$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}(u_n + 6) = \frac{1}{2}v_n$

L'égalité $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, vraie pour tout naturel montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 9 + 6 = 15$.

2. On a $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ (1) et en multipliant par $\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1 + \ldots + \frac{1}{2}v_n$, soit

$\frac{1}{2}S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + v_{n+1}$ (2).

Par différence entre les lignes (1) et (2), on obtient :

$\frac{1}{2}S_n = v_0 - v_{n+1}$.

Or on sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{15}{2^n}$, donc

$\frac{1}{2}S_n = 15 - \frac{15}{2^{n+1}} = 15\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Finalement $S_n = 30\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Comme $v_n = u_n + 6 \iff u_n = v_n - 6$, on obtient :

$S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + (n+1) \times 6 = S_n + 6(n+1) = 30\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 6(n+1)$.

3. Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 30$.

Par contre comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 6(n+1) = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n = +\infty$.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\frac{v_{n+1}}{v_n} = \ln\frac{1}{2}$ où $-\ln 2$.

L'égalité $w_{n+1} - w_n = -\ln 2$, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, montre que la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\ln 2$ de premier terme $w0 = \ln v_0 = \ln 15$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + (n+1)(-\ln 15)$.

5. $S''_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ et
$S''_n = w_n + w_{n-1} + \ldots + w_1 + w_0$: en sommant et en divisant par 2 le résultat, on obtient :
$S''_n = \dfrac{n+1}{2} \ln \dfrac{15^2}{2^n}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{15^2}{2^n} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln \dfrac{15^2}{2^n} = -\infty$ et enfin par produit de limites :
$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S''_n = -\infty$.

6. On a $w_n = \ln(v_n) \iff \mathrm{e}^{w_n} = v_n$, donc

$$P_n = v_0 v_1 \ldots v_n = \mathrm{e}^{w_0}\mathrm{e}^{w_1} \ldots \mathrm{e}^{w_n} = \mathrm{e}^{w_0 + w_1 + \ldots + w_n} = \mathrm{e}^{S''_n} = \mathrm{e}^{\frac{n+1}{2} \ln \frac{225}{2^n}} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{225}{2^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \left(\dfrac{225}{2^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

De $P_n = \mathrm{e}^{S''_n}$ et compte tenu du fait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S''_n = -\infty$, on a
$\displaystyle\lim_{\to +\infty} P_n = 0$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}.$$

Partie A

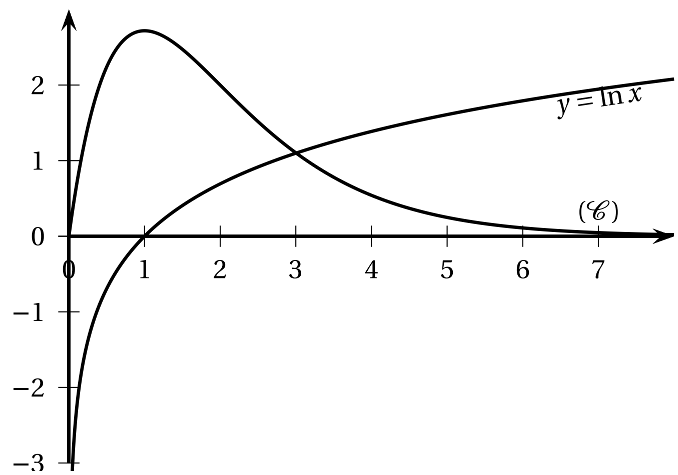
1. Produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x+2} - x\mathrm{e}^{-x+2} = \mathrm{e}^{-x+2}(1-x)$.
Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x+2} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$. Donc :

- Sur $[0\,;1[$, $f'(x) < 0$: la fonction est croissante sur $[0\,;1[$;
- Sur $]1\,;\,+\infty[$, f est décroissante ;
- $f(1) = 1\mathrm{e}^{1-2} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}367\,9$ est le maximum de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Comme $f(x) = x \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$, on sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f			e^{-1}		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

2. a.



Graphiquement les deux courbes n'ont qu'un point commun.

b. Sur $]0~;~+\infty[$ g est dérivable comme différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et :

$g'(x) = \dfrac{1}{x} - \mathrm{e}^{-x+2}(1-x) = \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^{-x+2}(x-1)$.

Or $x \geqslant 1 \Longrightarrow x-1 \geqslant 0$ et comme $\mathrm{e}^{-x+2} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ par produit $\mathrm{e}^{-x+2}(x-1) \geqslant 0$, or $x \geqslant 1 \Longrightarrow 0x\dfrac{1}{x} \leqslant 1$, donc finalement par somme $g'(x) \geqslant 0$: la fonction g est croissante sur $]0~;~+\infty[$.

On a $g(1) = \ln 1 - f(1) = 0 - \mathrm{e}^{-1} \approx -0{,}3679$ et d'une part $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et d'autre part $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Conclusion : la fonction g est continue car dérivable sur $[1~;~+\infty[$, $f(1) < 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction g étant croissante sur $[1~;~+\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un réel unique $\alpha \in [1~;~+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

La calculatrice montre que $3 < \alpha < 3,1$.

Partie B

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^{x}\left(4 - \mathrm{e}^{x}\right).$$

1. • On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 4 - \mathrm{e}^{x} = 4$ et par produit de limites $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x}\left(4 - \mathrm{e}^{x}\right) = 0$.

   • On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 4 - \mathrm{e}^{x} = -\infty$ donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x}\left(4 - \mathrm{e}^{x}\right) = -\infty$.

2. Soit h' la dérivée de h.

   a. h produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et
   $h'(x) = \mathrm{e}^{x}(4 - \mathrm{e}^{x}) - \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}(4 - \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{x}(4 - 2\mathrm{e}^{x}) = 2\mathrm{e}^{x}(2 - \mathrm{e}^{x})$.

   b. $2 - \mathrm{e}^{x} > 0 \iff 2 > \mathrm{e}^{x} \iff \ln 2 > x \iff x < \ln 2$.

   On a donc sur l'intervalle $]-\infty~;~\ln 2[$, $2 - \mathrm{e}^{x} > 0$ et comme $\mathrm{e}^{x} > 0$, par produit $h'(x) > 0$: la fonction h est croissante sur $]-\infty~;~\ln 2[$;

   De même $2 - \mathrm{e}^{x} < 0$ sur l'intervalle $]\ln 2~;~+\infty[$ et $h'(x) < 0$ sur cet intervalle où h est décroissante.

3. On a $h(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2}\left(4 - \mathrm{e}^{\ln 2}\right) = 2(4-2) = 4$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

4. On considère l'équation $h(x) = 3$.

a. On a $h(0) = 1 \times (4-1) = 3$, donc $x = 0$ est solution de l'équation $h(x) = 3$.

b. Posons $\mathrm{e}^x = X$, alors $h(x) - 3 = X(4-X) - 3 = 4X - X^2 - 3$.

$X = 1$ est une racine évidente de ce trinôme dont la seconde racine est $\dfrac{3}{1} = 3$.

On sait qu'alors $h(X) - 3 = (X-1)(-X+3) = (\mathrm{e}^x - 1)\left(-\mathrm{e}^x + 3\right)$.

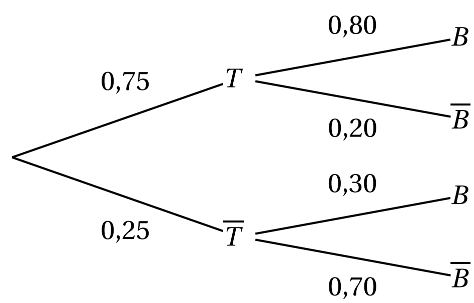
Conclusion : $h(x) - 3 = 0 \iff \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(-\mathrm{e}^x + 3\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x - 1 & = & 0 \\ -\mathrm{e}^x + 3 & = & 0 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^x & = & 1 \\ \mathrm{e}^x & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ x & = & \ln 3 \end{array}\right.$

Conclusion : $\lambda = \ln 3$.

Exercice 3

1. **a.** Arbre pondéré des probabilités :



On a donc $P(T \cap B) = (P(T) \times P_T(B) = 0,75 \times 0,8 = 0,60$.

b. D'après la loi des probabilités totales : $P(R) = P(T \cap B) + P\left(\overline{T} \cap B)\right)$.

Or $P\left(\overline{T} \cap B)\right) = 0,25 \times 0,30 = 0,075$.

D'où $P(R) = 0,60 + 0,075 = 0,675$.

2. On a $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0,675 = 0,325$.

Il faut trouver $P_{\overline{B}}(T) = \dfrac{P\left(\overline{B} \cap T\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{P\left(T \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{0,75 \times 0,20}{0,325}\dfrac{0,15}{0,325} \approx 0,462$.

3. La variable aléatoire X égale au nombre de candidats ayant échoué au concours suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,325$.

On a donc $P(X = 0) = \binom{3}{0} \times 0,325^0 \times 0,675^3 = 0,675^3$, donc

$P(X \geqslant 1) = 1 - 0,675^3 \approx 0,6924$ soit environ 0,692.

$P3 \approx 70\,\%$.

Exercice 4

Un marchand de guitares vend le même jour cinq guitares identiques à des particuliers.

Ce marchand accorde les guitares avant de les remettre à ses clients.
La probabilité qu'une guitare de ce type soit toujours accordée 6 mois après la vente est de 0,8.

La variable aléatoire X égale au nombre de guitares encore accordée(s) au bout de 6 mois suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,8$.

1. Donc $p(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0,8^5 \times (1-0,8)^0 = 0,8^5 \approx 0,3277$ soit 0,328 au millième près.
2. De même $p(X = 0) = \binom{5}{0} \times 0,8^0 \times (1-0,8)^5 = 0,2^5 = 0,000\,32$.
3. $p(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,8^2 \times (1-0,8)^3 = 10 \times 0,8^2 \times 0,^3 = 0,051\,2$.
4. On a $p(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,8^1 \times (1-0,8)^4 = 5 \times 0,8 \times 0,2^4 = 0,006\,4$.
   Donc $p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0,000\,32 + 0,006\,4 + 0,051\,2 = 0,057\,92 \approx 0,058$ au millième près.