∽ Baccalauréat Première Métropole-La Réunion ∽
série générale e3c Corrigé du n° 11 année 2020

Exercice 1 **5 points**

Ce QCM comprend 5 questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

Une urne contient 150 jetons rouges et 50 jetons bleus, tous indiscernables au toucher. 20 % des jetons rouges sont gagnants et 40 % des jetons bleus sont gagnants.
Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne.

Question 1

La probabilité que le jeton soit rouge et gagnant est :

a. $0,2$	**b.** $0,45$	**c.** $0,15$	**d.** $0,95$

Il y a 200 jetons. Avec R l'évènement : « le jeton tiré est rouge » et G l'évènement : « le jeton est gagnant », on a alors $P(R) = \dfrac{150}{200} = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$ et $P_R(G) = 0,20$.
Donc $P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = \dfrac{3}{4} \times 0,2 = 0,75 \times 0,2 = 0,15$.

Question 2

La probabilité que le jeton soit gagnant est :

a. $0,2$	**b.** $0,6$	**c.** $0,25$	**d.** $0,95$

D'après la loi des probabilités totales : $P(G) = P(G \cap R) + P\left(G \cap \overline{R}\right)$.
Or $P\left(G \cap \overline{R}\right) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(G) = 0,25 \times 0,4 = 0,1$.
Donc $P(G) = 0,15 + 0,1 = 0,25$.

Question 3

Un joueur tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. La probabilité qu'il tire deux jetons rouges est :

a. $0,5625$	**b.** $0,75$	**c.** $0,30$	**d.** $0,15$

La probabilité de tirer deux jetons rouges est $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16} = 0,5625$.

On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros d'un joueur.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

Valeurs a prises par X	-5	0	10
$P(X = a)$	0,6	0,15	0,25

Question 4

La probabilité $P(X > 0)$ est égale à :

a. $0,15$	**b.** $0,6$	**c.** 10	**d.** $0,25$

On a $P(X > 0) = P(X = 10) = 0,25$.

Question 5

Le gain algébrique moyen en euros que peut espérer un joueur est égale à :

a. 0	**b.** $-0,5$	**c.** $\dfrac{5}{3}$	**d.** 5

Le gain algébrique moyen en euros que peut espérer un joueur est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire X :
$E(X) = -5 \times 0,6 + 0 \times 0,15 + 10 \times 0,25 = -3 + 2,5 = -0,5 = -0,50$ (€).

Exercice 2 **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère les points : A$(-1\,;\ -3)$, B$(1\,;2)$ et C$(7\,;1)$.

1. Le triangle ABC est-il isocèle en B ?
On a $\text{BA}^2 = (1-(-1))^2 + (2-(-3))^2 = 4 + 25 = 29$;
$\text{BC}^2 = (7-1)^2 + (1-2)^2 = 36 + 1 = 37$, donc $\text{BA}^2 \neq \text{BC}^2$: le triangle n'est pas isocèle en B.

2. Déterminer la valeur arrondie au dixième de degré de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.
Par définitions du produit scalaire :
$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ (1).
Avec $\overrightarrow{\text{AB}}\binom{2}{5}$, $\overrightarrow{\text{AC}}\binom{8}{4}$, $\text{AB} = \sqrt{29}$ et $\text{AC} = \sqrt{80}$, l'égalité (1) devient :
$16 + 20 = \sqrt{29} \times \sqrt{80} \times \cos\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$, d'où
$\cos\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{36}{\sqrt{29 \times 80}}$.
La calculatrice donne : $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) \approx 41,6°$.

3. On considère le point H de coordonnées $(2,6\,;\ -1,2)$.
Le point H est-il le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) ?
Le point H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) si :
- H appartient à la droite (AC) et si
- (BH) est perpendiculaire à (AC).

Or $\overrightarrow{\text{AH}}\binom{3,6}{1,8}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\binom{8}{4}$: manifestement ces vecteurs sont colinéaires : H appartient à la droite (AC) .
De plus $\overrightarrow{\text{AC}}\binom{8}{4}$ et $\overrightarrow{\text{BH}}\binom{1,6}{-3,2}$, d'où :
$\overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{BH}} = 8 \times 1,6 + 4 \times (-3,2) = 12,8 - 12,8 = 0$, : les vecteurs sont orthogonaux, donc le point H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

Exercice 3 **5 points**

En 2002, Camille a acheté une voiture, son prix était alors de 10 500 €. La valeur de cette voiture a baissé de 14 % par an.

1. La valeur de cette voiture est modélisée par une suite. On note P_n la valeur de la voiture en l'année $2002 + n$. On a donc $P_0 = 10\,500$.

a. Déterminer la nature de la suite (P_n).
Baisser de 14 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{14}{100} = 1 - 0,14 = 0,86$.
La suite (P_n) est donc une suite géométrique de premier terme $P_0 = 10\,500$ et de raison 0,86.

b. Quelle était la valeur de cette voiture en 2010 ?
La valeur en 2010 est $P_8 = 10\,500 \times 0,86^8 \approx 3\,141,79$ (€).

2. Camille aimerait savoir à partir de quelle année la valeur de sa voiture est inférieure à 1 500 €.
Pour l'aider, on réalise le programme Python incomplet ci- dessous.

a. Recopier et compléter sur votre copie les deux parties en pointillé du programme ci-dessous :

```
def algo( ) :
  P= 10 500
  n = 2002
  while P ⩾ 1 500:
    P= 0,86*P.
    n=n+1
  return(n)
```

b. Donner la valeur renvoyée par ce programme.
La valeur renvoyée est 2015.

Exercice 4 **5 points**

Une entreprise fabrique un engrais biologique. Chaque jour, le volume d'engrais fabriqué est compris entre 5 m^3 et 60 m^3.
Le coût moyen quotidien de production de cet engrais, exprimé en **centaines d'euros**, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[5\,;\,60]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 15x + 400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3.

1. Déterminer le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 d'engrais.
On a $f(5) = \dfrac{5^2 - 15 \times 5 + 400}{5} = 5 - 15 + 80 = 70$.
Le coût moyen de 5 m^3 d'engrais est 7 000 €.

2. Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen de production égal à 4 300 €(43 centaines d'euros) ?
Il faut résoudre l'équation :
$f(x) = 43 \iff \dfrac{x^2 - 15x + 400}{x} = 43 \iff x^2 - 15x + 400 = 43x$ (avec $x \neq 0$) ou encore
$x^2 - 58x + 400 = 0$. Avec $\Delta = 58^2 - 4 \times 400 = 3364 - 1600 = 1764 = 42^2$.
Les racines sont $\dfrac{58+42}{2} = 50$ et $\dfrac{58-42}{2} = 8$
En fabriquant 8 ou 50 m^3 d'engrais le coût moyen de production est 4 300 euros.

3. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen de production est-il minimal ?
Déterminer ce coût moyen minimal.
La fonction f est dérivable sur $[5\,;\,60]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{x(2x-15) - \left(x^2 - 15x + 400\right)}{x^2}$: $\dfrac{2x^2 - 15x - x^2 + 15x - 400}{x^2} = \dfrac{x^2 - 400}{x^2} = \dfrac{(x+20)(x-20)}{x^2}$.
$f'(x)$ est du signe de $(x+20)(x-20)$ (car $x^2 > 0$) et l'on sait que ce trinôme est positif sauf sur $]-20\,;\,20[$.
Donc sur $[5\,;\,20[$, $f'(x) < 0$ et f est donc décroissante et sur $[20\,;\,60]$, la fonction f est croissante.
D'où le tableau de variations (avec $f(20) = 25$) :

x	5		20		60
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	70	↘	25	↗	$\approx 51,7$

D'après cette étude le minimum est atteint pour $x = 20$ et ce coût moyen minimal est égal à $f(20) = 25$, soit 2 500 €.