

## ✎ Corrigé du Baccalauréat S Polynésie 13 juin 2014 ✎

### Exercice 1

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5; -5; 2), \quad B(-1; 1; 0), \quad C(0; 1; 2), \quad \text{et } D(6; 6; -1)$$

1. Nature du triangle  $BCD$  :

$$\begin{cases} BC^2 = (0 - (-1))^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 0)^2 = 5 \\ CD^2 = (6 - 0)^2 + (6 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 = 70 \\ BD^2 = (6 - (-1))^2 + (6 - 1)^2 + (-1 - 0)^2 = 75 \end{cases} \implies BD^2 = BC^2 + CD^2 \implies BCD \text{ est rectangle en } C$$

2. Son aire est :  $\frac{BC \times CD}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{70}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{14}$ .

a. Le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $(BCD)$  :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times (-2) + 0 \times 3 + 2 \times 1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \times (-2) + 5 \times 3 + (-3) \times 1 = 0$$

Comme  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CD}$  ne sont pas colinéaires ( $BCD$  est un triangle rectangle non aplati),  $\vec{n}$  étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $(BCD)$ , il en est un vecteur normal.

b. Équation cartésienne du plan  $(BCD)$  :

- L'équation est de la forme  $-2x + 3y + z + d = 0$ ;
- $B$  appartient au plan, donc  $-2(-1) + 3(1) + (0) + d = 0 \iff d = -5$ ;
- une équation cartésienne du plan  $(BCD)$  est :  $-2x + 3y + z - 5 = 0$ .

3. Représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  orthogonale au plan  $(BCD)$  (donc de vecteur directeur  $\vec{n}$ ) et passant par le point  $A$  :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

4. Déterminer les coordonnées du point  $H$ , intersection de la droite  $\mathcal{D}$  et du plan  $(BCD)$ .

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ -2x + 3y + z - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ -2(5 - 2t) + 3(-5 + 3t) + (2 + t) - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 - 2(2) = 1 \\ y = -5 + 3(2) = 1 \\ z = 2 + 2 = 4 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de  $H$  sont :  $(1; 1; 4)$ .

5. Volume du tétraèdre  $ABCD$  :

$[AH]$  est la hauteur du tétraèdre, car  $A$  est sur la droite  $\mathcal{D}$  orthogonale au plan  $(BCD)$  et  $H$  est l'intersection de  $\mathcal{D}$  et  $(BCD)$ , donc la projection orthogonale de  $A$  sur  $(BCD)$ .

$\mathcal{B} = 5\sqrt{7}$ ;  $h = AH = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{14}$ ; donc :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{14} \times \frac{5}{2}\sqrt{14} = \frac{70}{3}$$

6. Mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$  :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad AB = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{76}; \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad AC = \sqrt{(-5)^2 + 6^2 + (0)^2} = \sqrt{61};$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{(-6) \times (-5) + 6 \times 6 + (-2) \times 0}{\sqrt{76} \times \sqrt{61}} = \frac{66}{\sqrt{4636}} \approx 0,97 \implies$$

$\text{mes} \widehat{BAC} \approx 14,2$  au dixième de degré près

**Exercice 2****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1.  $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2 = 2$  et  $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2 = 6$ .
2. **Le second affiche en sortie la valeur de  $u_n$** , la valeur de l'entier naturel  $n$  étant entrée par l'utilisateur.
3. Étude de la suite  $(u_n)$  :
  - a. La suite  $(u_n)$  semble être croissante.

Démonstration :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n + 2 > 0 \quad \text{pour tout } n \text{ naturel}$$

- b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = an^2 + bn + c$ .

$$\begin{cases} u_0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \\ u_1 = a \times 1^2 + b \times 1 + c = 2 \\ u_2 = a \times 2^2 + b \times 2 + c = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

4. On définit, pour tout entier naturel  $n$ , la suite  $(v_n)$  par :  $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n + 2$ .

- a. C'est une suite arithmétique de raison  $r = 2$  et de premier terme  $v_0 = 2$ .

- b. On définit, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ .

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (n+1)v_0 + \frac{n(n+1)}{2} \times r = 2(n+1) + n(n+1) = (n+1)(n+2)$$

- c. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = u_{n+1} - u_0$ , puis exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$$S_n = (\mu_1 - u_0) + (\mu_2 - \mu_1) + \dots + (\mu_n - \mu_{n-1}) + (u_{n+1} - \mu_n) = u_{n+1} - u_0$$

$$S_{n-1} = u_n - u_0 \iff u_n = S_{n-1} + u_0 = n(n+1) + 0 = n(n+1)$$

## Exercice 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

### Partie A

1. Une personne née le 1<sup>er</sup> août, le programme de calcul (A) donne le nombre 308 :
  - Numéro du jour de naissance multiplié par 12 :  $1 \times 12 = 12$ ;
  - Numéro du mois de naissance multiplié par 37 :  $8 \times 37 = 296$ ;
  - $12 + 296 = 308$ .
2. a. Pour un spectateur donné, on note  $j$  le numéro de son jour de naissance,  $m$  celui de son mois de naissance et  $z$  le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).

$$z = 12j + 37m, \text{ or } 12 \equiv 0 [12] \text{ et } 37 \equiv 1 [12] \text{ donc } z = 12j + 37m \equiv 0 \times j + 1 \times m [12] \text{ soit } z \equiv m [12]$$

- b. Date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A) :

$$\begin{cases} z = 474 = 39 \times 12 + 6 \\ z \equiv 37m [12] \end{cases} \implies z = (3 \times 12 + 1)m \equiv 6 [12] \implies m \equiv 6 [12], \text{ le mois est donc juin}$$

$$z = 474 = 12j + 37 \times 6 \implies 12j = 474 - 37 \times 6 = 252 = 21 \times 12 \implies j = 21$$

**Le spectateur est donc né un 21 juin.**

### Partie B

Le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est  $j$  et le numéro du mois de naissance est  $m$ , le magicien demande de calculer le nombre  $z$  défini par  $z = 12j + 31m$ .

1. Première méthode :

Algorithme modifié (AlgoBox) pour qu'il affiche toutes les valeurs de  $j$  et de  $m$  telles que  $12j + 31m = 503$ .

```

1  VARIABLES                                13      AFFICHER j
2  j EST_DU_TYPE NOMBRE                    14      AFFICHER "\ "
3  m EST_DU_TYPE NOMBRE                    15      AFFICHER m
4  z EST_DU_TYPE NOMBRE                    16      AFFICHER "; "
5  DEBUT_ALGORITHME                        17      FIN_SI
6  POUR m ALLANT_DE 1 A 12                 18      FIN_POUR
7  DEBUT_POUR                               19      FIN_POUR
8  POUR j ALLANT_DE 1 A 31                 20      FIN_ALGORITHME
9  DEBUT_POUR
10     z PREND_LA_VALEUR 12*j+31*m         ***Algorithme lancé***
11     SI (z==503) ALORS                    29\ 5;
12     DEBUT_SI                             ***Algorithme terminé***
    
```

**Le spectateur est donc né un 29 mai.**

2. Deuxième méthode :

- a.  $12a \equiv 0 [12]$  pour tout  $a$  entier, donc

$$z = 12j + 31m \equiv 31m = (2 \times 12 + 7)m = 12 \times 2m + 7m \equiv 7m [12]$$

$7m$  et  $z$  ont donc le même reste dans la division euclidienne par 12.

- b. Pour  $m$  variant de 1 à 12, reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12 :

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
reste	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0

On remarque qu'à chacun des 12 restes possibles correspond un seul mois.

- c. Date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B) :

$$\begin{cases} z = 503 = 41 \times 12 + 11 \\ z \equiv 7m \pmod{12} \end{cases} \implies 7m \equiv 11 \pmod{12} \implies m = 5, \text{ le mois est donc mai}$$

$$z = 503 = 12j + 31 \times 5 \implies 12j = 503 - 31 \times 5 = 29 \times 12 \implies j = 29$$

**Le spectateur est donc né un 29 mai.**

3. Troisième méthode :

- a. Le couple  $(-2 ; 17)$  est solution de l'équation  $12x + 31y = 503$  :

$$12 \times (-2) + 31 \times (17) = 503$$

- b. Un couple d'entiers relatifs  $(x ; y)$  est solution de l'équation  $12x + 31y = 503$  :

$$\begin{cases} 12x + 31y = 503 \\ 12 \times (-2) + 31 \times (17) = 503 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \implies 12(x+2) + 31(y-17) = 0 \quad (L_1 - L_2) \iff 12(x+2) = 31(17-y) \quad (E)$$

- c. Résolution de l'équation  $12x + 31y = 503$  :

- Partie directe :

$$12x + 31y = 503 \implies \begin{cases} 12(x+2) = 31(17-y) \\ \text{pgcd}(12;31) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{GAUSS}} 31 \text{ divise } x+2$$

Ainsi, il existe un entier relatif  $k$  vérifiant  $x + 2 = 31k \iff x = -2 + 31k$ .

En remplaçant dans (E), on obtient :

$$\begin{cases} 12(x+2) = 31(17-y) \\ x+2 = 31k \end{cases} \implies 12 \times 31k = 31(17-y) \iff 12k = 17-y \iff y = 17 - 12k$$

- Réciproque : pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , on a :

$$12(-2 + 31k) + 31(17 - 12k) = \underbrace{12 \times (-2) + 31 \times (17)}_{503} + \underbrace{12 \times 31k - 12 \times 31k}_{0} = 503$$

- Conclusion : les couples solutions de l'équation  $12x + 31y = 503$  sont de la forme  $(-2 + 31k ; 17 - 12k)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- d. Il existe un unique couple d'entiers relatifs  $(x ; y)$  tel que  $1 \leq y \leq 12$  :

$$1 \leq y \leq 12 \iff 1 \leq 17 - 12k \leq 12 \iff -16 \leq -12k \leq -5 \iff 5 \leq 12k \leq 16 \iff \frac{5}{12} \leq k \leq \frac{16}{12}$$

Ainsi  $k = 1$  est l'unique entier compris entre  $\frac{5}{12} \approx 0,4166$  et  $\frac{16}{12} \approx 1,3333$ .

L'unique couple recherché est donc :  $(-2 + 31 \times 1 ; 17 - 12 \times 1) = (29 ; 5)$

**Le spectateur est donc né un 29 mai.**

**Exercice 3**

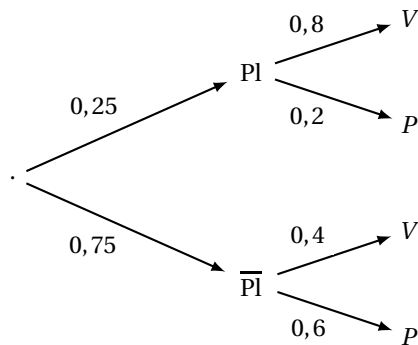
**5 points**

**Commun à tous les candidats**

- Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre. Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas. Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.

**Affirmation n° 1 : VRAIE**

Arbre de probabilités :



On cherche  $p(V)$  :

$$\begin{aligned}
 p(V) &= p(V \cap \text{Pl}) + p(V \cap \overline{\text{Pl}}) \\
 &= p_{\text{Pl}}(V) \times p(\text{Pl}) + p_{\overline{\text{Pl}}}(V) \times p(\overline{\text{Pl}}) \\
 &= 0,8 \times 0,25 + 0,4 \times 0,75 = 0,5
 \end{aligned}$$

« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

Pl : il pleut; V : en voiture; P : à pied

- Dans l'ensemble  $E$  des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements  $A$  et  $B$ .

**Affirmation n° 2 : VRAIE**

$A$  et  $B$  sont indépendants signifie que  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$  :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p(B) + p(A \cap \overline{B}) \implies p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A)(1 - p(B)) = p(A) \times p(\overline{B})$$

« Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $A$  et  $\overline{B}$  sont aussi indépendants. »

- On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,7.

**Affirmation n° 3 : FAUX**

$$p(T \leq 5) = \int_0^5 0,7e^{-0,7x} dx = [-e^{-0,7x}]_0^5 = 1 - e^{-0,7 \times 5} \approx 0,97$$

La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est :

$$p(T > 5) = 1 - p(T \leq 5) \approx 0,03$$

**Affirmation n° 4 : FAUX**

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,7} \approx 1,42$$

« Le temps d'attente moyen à ce guichet est d'environ 1 minute et demi. »

- Affirmation n° 5 : VRAIE**

La proportion de personnes de groupe sanguin A+ dans la population française est  $p = 0,39$ .

La taille de l'échantillon est  $n = 183 \geq 30$ ;

$$np = 183 \times 0,39 = 71,37 \geq 5 \text{ et } n(1 - p) = 183 \times (1 - 0,39) = 111,63 \geq 5.$$

Donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 5 % de la proportion de personnes ayant un groupe sanguin A+ :

$$I = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,39 - 1,96 \frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}} ; 0,39 + 1,96 \frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}} \right]$$

$$I \approx [0,319 ; 0,461]$$

Or  $0,34 \in I$ , donc on ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population.

**Exercice 4**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$$

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthogonal.

1. Intersection de deux courbes :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g \iff f(x) = g(x) \iff e^x = 2e^{\frac{x}{2}} - 1 \iff \begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} \\ X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2 = 0 \end{cases} \iff e^{\frac{x}{2}} = 1 \iff x = 0$$

Ainsi  $M$  a pour coordonnées  $(0; 1)$ .

$$f'(x) = e^x \implies f'(0) = 1 \quad ; \quad g'(x) = e^{\frac{x}{2}} \implies g'(0) = 1$$

En  $M$ , leurs tangentes ont, toutes deux le même coefficient directeur 1, elles ont donc même tangente  $\Delta$  d'équation  $y - 1 = 1(x - 0) \iff y = x + 1$ .

2. Étude de la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_g$  et de la droite  $\Delta$

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$ .

a. Limite de la fonction  $h$  en  $-\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$$

b. Pour tout réel  $x$

$$x \left( \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right) = \cancel{x} \times e^{\frac{x}{2}} \times \frac{2}{\cancel{x}} - x - \cancel{x} \frac{2}{\cancel{x}} = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 = h(x)$$

Limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{X = \frac{x}{2} \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

c. Fonction dérivée de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - 1 = e^{\frac{x}{2}} - 1$$

$$h'(x) > 0 \iff e^{\frac{x}{2}} > 1 \iff \frac{x}{2} > 0 \iff x > 0 \text{ et } h'(x) < 0 \iff e^{\frac{x}{2}} < 1 \iff \frac{x}{2} < 0 \iff x < 0$$

d. Tableau de variations de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

e. La fonction  $h$  possède un minimum en  $0$  qui est  $0$ . Donc :

$$\forall x, x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0 \iff 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 = 2e^{\frac{x}{2}} - 1 - x - 1 \geq 0 \iff 2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$$

f. Ainsi la courbe  $\mathcal{C}_g$  se trouve au dessus de la droite d'équation  $y = x + 1$  qui est la droite  $\Delta$ .

3. Étude de la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$

a. On a vu plus haut (question 1.) que, pour tout réel  $x$ ,  $(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = f(x) - g(x) \geq 0$ .

b. Ainsi la courbe  $\mathcal{C}_f$  se trouve au dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$ .

$$\text{Ainsi, } |f(x) - g(x)| = (f(x) - g(x)).$$

4. Aire  $\mathcal{A}$  du domaine compris entre les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 e^x dx - 4 \int_0^1 \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx + \int_0^1 dx \\ &= [e^x]_0^1 - 4 \left[ e^{\frac{x}{2}} \right]_0^1 + [x]_0^1 = e - 1 - 4e^{\frac{1}{2}} + 4 + 1 = e - 4\sqrt{e} + 4 \simeq 0,123 \end{aligned}$$

