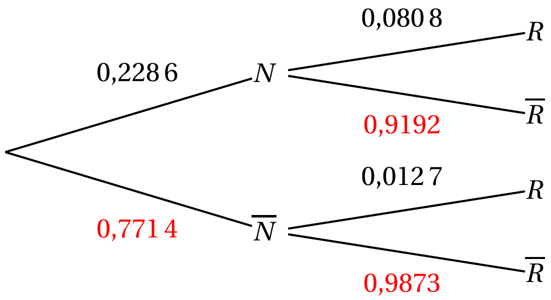
Corrigé du baccalauréat Amérique du Nord - 22 mai 2024

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

1 Exercice 1 — 5 points

1.



2. On calcule $p(N \cap R) = p(N) \times p_N(R) = 0{,}228\,6 \times 0{,}080\,8 = 0{,}018\,471$ soit $0{,}018\,5$ à 10^{-4} près.

3. On a de même $p\left(\overline{N} \cap R\right) = p\,(N) \times p_{\overline{N}}(R) = 0{,}771\,4 \times 0{,}012\,7 = 0{,}009\,797$ soit $0{,}009\,8$ à 10^{-4} près.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(R) = p(N \cap R) + p\left(\overline{N} \cap R\right) \approx 0{,}018\,5 + 0{,}009\,8$

$p(R) \approx 0{,}028\,3$.

4. On a $p_R(N) = \dfrac{p(R \cap N)}{p(R)} = \dfrac{p(N \cap R)}{p(R)} \approx \dfrac{0{,}018\,5}{0{,}028\,3} \approx 0{,}653\,71$ soit $0{,}653\,7$ à 10^{-4} près.

Partie I

1. X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n = 500,\ p = 0,65)$.

2. On calcule $\binom{500}{325} \times 0,65^{325} \times 0,35^{175} \approx 0{,}037\,384$ soit $0{,}037\,4$ à 10^{-4} près. (Utiliser la fonction binomiale de la calculatrice si les capacités de calcul de celle-ci sont dépassées).

3. On a $p(X \geqslant 325) = 1 - p(X \leqslant 324)$ soit d'après la calculatrice $0{,}479\,44$, donc

$p(X \geqslant 325) \approx 1 - 0{,}479\,4 = 0{,}520\,6$ à 10^{-4} près.

Partie II

1. On a $p_n = (1 - 0,65)^n = 0,35^n$.

2. On a $q_n = 1 - p_n$.

On cherche donc n tel que $1 - p_n \geqslant 0{,}999\,9 \iff p_n \leqslant 0{,}000\,1$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

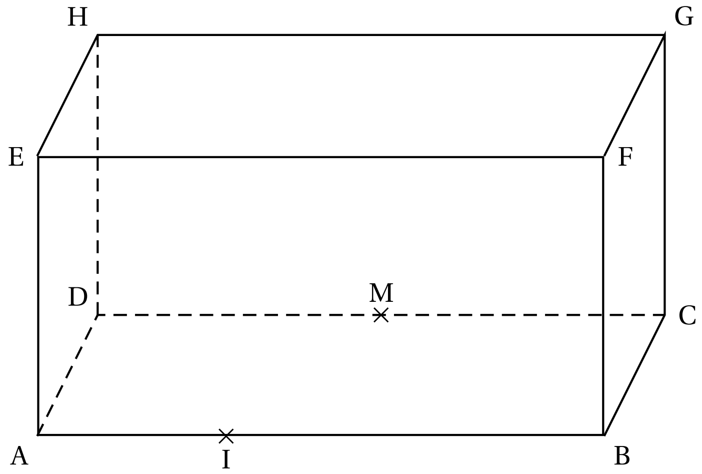
$n \ln 0,35 \leqslant \ln 00{,}000\,1 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}000\,1}{\ln 0,35}$ car $\dfrac{1}{\ln 0,35} < 0$.

D'après la calculatrice $\dfrac{\ln 0{,}000\,1}{\ln 0,35} \approx 8,8$.

Il faut prendre au minimum $n = 9$.

2 Exercice 2 5 points

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 3 et AD = AE = 1 représenté ci-dessous.



1. F(3 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1), M(1,5 ; 1 ; 0).

2. **a.** Soit $\overrightarrow{\text{HF}}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{MF}}\begin{pmatrix}1,5\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires.
On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{HF}} = 6-6+0 = 0$
On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{MF}} = 3-6+3 = 0$.
Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF), il est donc normal à ce plan

   b. On sait qu'alors :
$X(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(MHF)} \iff 2x+6y+3z+d = 0$. Ainsi par exemple :
$\text{H}(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(MHF)} \iff 0+6+3+d = 0 \iff d = -9$, donc finalement :

$$X(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(MHF)} \iff 2x+6y+3z-9 = 0.$$

   c. Le plan $\mathscr{P}$ a par exemple pour vecteur normal $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$, (on a bien $2\times\dfrac{5}{2} = 5$, $6\times\dfrac{5}{2} = 15$, mais $3\times\dfrac{5}{2} \neq -3$) donc les deux plans ne sont pas parallèles.

3. On a D(0 ; 1 ; 0) et G(3 ; 1 ; 1), d'où $\overrightarrow{\text{DG}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

   On sait que :

$X(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{DG}) \iff \overrightarrow{\text{DX}} = t\overrightarrow{\text{DG}},\ t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{l c l}x-0 & = & 3t\\ y-1 & = & 0\\ z-0 & = & 1t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R} \iff$

$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & 3t\\ y & = & 1\\ z & = & t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}.$

4. Si la droite coupe le plan en un point N, les coordonnées de ce point vérifient les équations de la droite et celle du plan soit le système :

$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & 3t\\ y & = & 1\\ z & = & t\\ 2x+6y+3z-9 & = & 0\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}.$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$6t+6+3t-9=0 \iff 9t-3=0 \iff 3t-1=0 \iff t=\dfrac{1}{3}$. Les coordonnées de N sont donc $\left(3\times\frac{1}{3}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$, soit $\text{N}\left(1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

5. • On vérifie d'abord que R appartient au plan (HMF) :

$\text{R}\left(3\ ;\ \dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right) \in (\text{HMF}) \iff 6+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}-9=0 \iff 6+3-9=0$ ce qui est vrai.

• On vérifie maintenant que le vecteur $\overrightarrow{\text{GR}}$ est bien un vecteur normal au plan (HMF) :

On a $\overrightarrow{\text{GR}}\begin{pmatrix}3-3\\ \frac{1}{4}-1\\ \frac{1}{2}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Or ce vecteur n'est manifestement pas colinéaire au vecteur connu $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$: pour que $\overrightarrow{n}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\text{GR}}$ il faudrait que sa première coordonnée soit égale à 0, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

3 Exercice 3 6 points

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Le trinôme $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\ ;\ 1]$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = 2-2x = 2(1-x)$.

Or on sait que $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow -x \leqslant 0 \leqslant 1-x$ ou en lisant de droite à gauche

$1-x \geqslant 0 \Rightarrow 2(1-x) \geqslant 0 \iff g'(x) \geqslant 0$: la dérivée étant positive sur $[0\ ;\ 1]$ et ne s'annulant qu'en $x=1$, la fonction g est strictement croissante de $g(0)=0$ à $g(1)=2-1^2=1$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. • $u_1 = 2 \times \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75$;

• $u_2 = 2 \times \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{24}{16} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{15}{16} = 0,9375$.

3. Démonstration par récurrence :

• *Initialisation* :

On a $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$, soit $0 < u_0 < u_1 < 1$: l'encadrement est vrai au rang zéro.

• *Hérédité* : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Alors par stricte croissance sur $[0 ; 1]$ de la fonction g, on a :

$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$, soit d'après les résultats précédents :

$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$: l'encadrement est encore vrai au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: par le principe de récurrence, on a donc

Pour tout entier naturel n, : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est majorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \leqslant 1$.

5. La relation $g(u_n) = u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ donne à la limite car g est continue car dérivable sur l'intervalle $[0 ; 1]$: $\ell = 2\ell - \ell^2 \iff$

$\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(1-\ell) = 0$ soit

$\begin{cases} \ell & = & 0 \text{ ou} \\ 1-\ell & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell & = & 0 \text{ ou} \\ 1 & = & \ell \end{cases}$

La solution $\ell = 0$ n'est pas possible (la suite est croissante) ; il reste $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1}) = \ln\left[1 - \left(2u_n - u_n^2\right)\right] = \ln\left(1 - 2u_n + u_n^2\right) =$ $\ln(1-u_n)^2 = 2\ln(1-u_n)$ (car $1-u_n > 0$ voir la récurrence ci-dessus, donc $\ln(1-u_n)$ existe). Or $\ln(1-u_n) = v_n$.

Finalement : $v_{n+1} = 2v_n$ ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln(1-u_0) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

7. On sait qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n$, soit $v_n = -\ln 2 \times 2^n$.

8. La relation $v_n = \ln(1-u_n)$ donne donc :

$-\ln 2 \times 2^n = \ln(1-u_n) \iff \mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n} = \mathrm{e}^{\ln(1-u_n)}$, (par croissance de la fonction exponentielle), soit encore :

$\mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n} = 1 - u_n \iff u_n = 1 - \mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n}$.

Or on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} -\ln 2 \times 2^n = -\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-\ln 2 \times 2^n} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

9.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=n + 1
        u=2*u - u**2
    return n
```

4 Exercice 4 — 4 points

$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. On a $f(x) = 0 \iff a\ln x = 0 \iff \ln x = 0$ (car $a \neq 0$) et par croissance de la fonction exponentielle $\mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^0 \iff x = 1$.

2. F est une différence de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, donc sur cet intervalle :

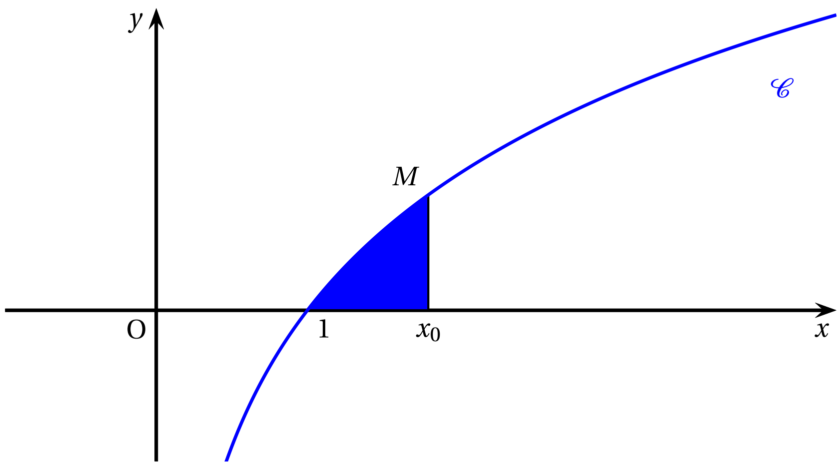
   $F'(x) = a\left[\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1\right] = a[\ln(x) + 1 - 1] = a\ln(x) = f(x)$, ce qui montre que F est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

3. On a vu que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ donc la surface bleue correspond à des points où $x \geqslant 1$, soit $\ln(x) \geqslant 0 \Rightarrow a\ln(x) \geqslant 0$.

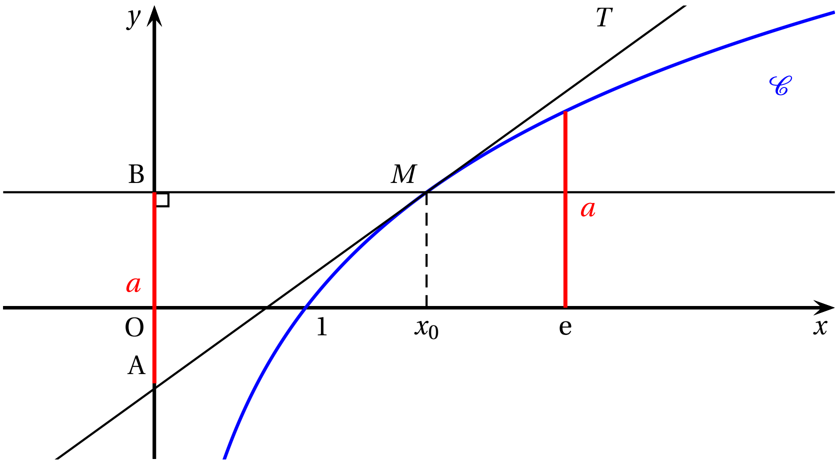
   Autrement dit pour $x \geqslant 1$, la fonction f est positive et on sait que sur un intervalle $[1~;~x_0]$ avec $x_0 \geqslant 1$, l'aire de la surface limitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$ est égale à l'intégrale :

   $$\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1) = a[x_0\ln(x_0) - x_0] - a[1\ln(1) - 1] = .$$

   l'aire bleutée est en unités d'aire : $a[x_0\ln(x_0) - x_0] + a = a\,[x_0\ln(x_0) - x_0 + 1]$.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. On sait (équation de la tangente au point d'abscisse x_0) que :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y - f(x_0) = f'(x - x_0))$.

- $f(x_0) = a\ln x_0$;
- f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{a}{x}$, donc $f'(x_0) = \dfrac{a}{x_0}$.

On obtient donc :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y - a\ln x_0 = \dfrac{a}{x_0} \times (x - x_0) \iff y = a\ln x_0 + \dfrac{ax}{x_0} - a$.

En particulier T coupe l'axe des ordonnées si $x = 0$, d'où $y = a\ln x_0 - a$ (ordonnée de A).

L'ordonnée de B est égale à $f(x_0) = a\ln(x_0)$.

On a AB $= |y_B - y_A| = |a\ln(x_0) - (a\ln x_0 - a)| = |a| = a$ (car $a > 0$).

Remarque : On a $f(\mathrm{e}) = a\ln \mathrm{e} = a \times 1 = a$.

$f(\mathrm{e}) = a$: on a mis en évidence ceci sur le dessin ; le corollaire est que la tangente à la courbe au point d'abscisse e contient l'origine O !