

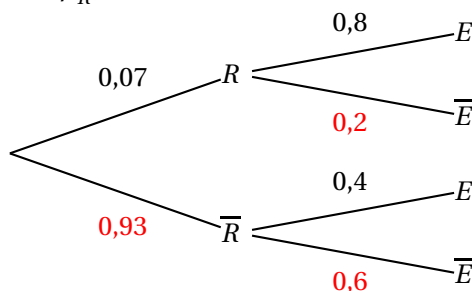
EXERCICE 1

5 points

Partie A

1. On dresse l'arbre pondéré de probabilités en utilisant les données de l'énoncé :

$p(R) = 0,07; p_R(E) = 0,8$ et $p_{\bar{R}}(E) = 0,4$:



On a $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

2. D'après la loi des probabilités totales :

$p(E) = p(R \cap E) + p(\bar{R} \cap E)$.

Or $p(\bar{R} \cap E) = p(\bar{R}) \times p_{\bar{R}}(E) = 0,93 \times 0,4 = 0,372$.

Donc $p(E) = 0,056 + 0,372 = 0,428$.

3. On a $p_E(R) = \frac{p(E \cap R)}{p(E)} = \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{0,056}{0,428} = \frac{56}{428} = \frac{14}{107} \approx 0,1308$ soit 0,131 au millièmè près.

Partie B

1. Les évènements étant indépendants et la probabilité d'obtenir un objet rare étant toujours égale à 0,07, la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 30$ et $p = 0,07$.

L'espérance mathématique est $E = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$.

2. La calculatrice donne $P(X < 6) \approx 0,9838$ soit 0,984 au millièmè près.

3. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $p(X \geq k + 1) = 1 - p(X \leq k)$. D'après la calculatrice :

$p(X \geq 1 + 1) = 1 - p(X \leq 1) \approx 0,631$, et $p(X \geq 2 + 1) = 1 - p(X \leq 2) \approx 0,351$, on a donc $k = 2$.

Dans le cadre du jeu ceci signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure à $\frac{1}{2}$.

4. Il faut donc trouver X tel que $p(X \geq 1) \geq 0,95$ ou encore $1 - p(X = 0) \geq 0,95 \iff p(X = 0) \leq 1 - 0,95 \iff p(X = 0) \leq 0,05$.

Or $p(X = 0) = \binom{N}{0} \times 0,07^0 \times (1 - 0,07)^N = 0,93^N$.

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$0,93^N \leq 0,05 \Rightarrow N \ln 0,93 \leq \ln 0,05$ par croissance de la fonction logarithme népérien

et enfin $N \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,93}$, car $\ln 0,93 < 0$ et son inverse $\frac{1}{\ln 0,93}$ aussi.

D'après la calculatrice $\frac{\ln 0,05}{\ln 0,93} \approx 41,3$.

Conclusion Il faut que $N \geq 42$.

EXERCICE 2**4 points**

1. On considère les points $A(1; 0; 3)$ et $B(4; 1; 0)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. M(x; y; z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x-1 = 3t \\ y-0 = 1t \\ z-3 = -3t, \end{cases} t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 3-3t \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ Réponse c.}$$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

2. Réponse d.

3. • Les deux droites ont pour vecteurs directeurs respectifs : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$: ces vec-

teurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

- Les deux droites sont sécantes s'il existe deux réels t et k tels que :

$$\begin{cases} 3+4t = -2+3k \\ 6t = -1-2k \\ 4-2t = 1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 4t = 3k-5 \\ 6t = -2k-1 \\ -2t = k-3 \end{cases}$$

Par différence de la ligne 1 et de la ligne 2, on obtient $-2t = 5k - 4 = k - 3$ (ligne 3) soit $4k = 1 \iff k = \frac{1}{4}$, puis comme $-2t = k - 3 = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$, d'où $t = \frac{11}{8}$, mais la première ligne donne $4t = 3k - 5 = \frac{3}{4} - 5 = -\frac{17}{4}$, d'où $t = \frac{17}{8}$: ceci n'est pas possible : les deux droites ne sont pas sécantes.

- Les deux droites ne sont pas confondues : il reste la réponse b.

4. Le vecteur \vec{n} vecteur directeur de (d) est un vecteur normal au plan (P) . On a donc $M(x; y; z) \in (P) \iff \overrightarrow{IM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 4(x-2) + 6(y-1) - 2(z-0) = 0 \iff 4x - 8 + 6y - 6 - 2z = 0 \iff 4x + 6y - 2z - 14 = 0 \iff 2x + 3y - z - 7 = 0$: réponse a.

EXERCICE 3**5 points**

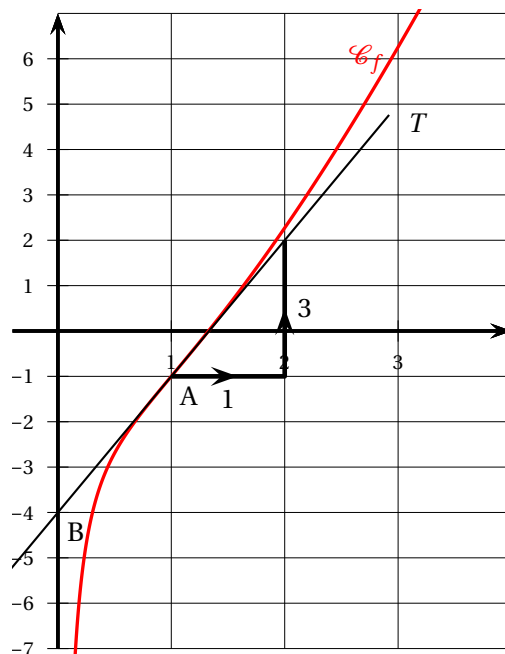
Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x^2) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative (\mathcal{C}_f) de la fonction f , ainsi que la droite (T) , tangente à la courbe (\mathcal{C}_f) au point A de coordonnées $(1; -1)$.

Cette tangente passe également par le point B(0; -4).



1. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est le nombre dérivé $f'(1)$; on lit sur le graphique $f'(1) = \frac{3}{1} = 3$.
L'ordonnée à l'origine est égale à -4 , donc l'équation réduite de la tangente (T) est

$$M(x; y) \in (T) \iff y = 3x - 4.$$

2. • il semble que f est concave sur $]0; 1[$;
• il semble que f est convexe sur $]1; +\infty[$.
Le point A semble être un point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}_f).

Partie B : étude analytique

- 1.
- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) = +\infty$; donc par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - Avec $f(x) = 2x \ln x - \frac{1}{x}$, on sait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote verticale de (\mathcal{C}_f) au voisinage de zéro).
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- a. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \ln(x^2)$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et l'on a :
 $f'(x) = \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}$ ou $f'(x) = 2 \ln x + 2 + \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.
 - b. En dérivant $f'(x)$ on obtient :
 $f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.
3. a. Comme $x^3 > 0$ sur $]0; +\infty[$, le signe de $f''(x)$ est celui de $(x+1)(x-1)$ et comme $x+1 > 1 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$.
Conclusion :

- Sur $]0; 1[$, $x < 1$, $f''(x) < 0$: la fonction est concave;
- Sur $]1; +\infty[$, $x > 1$, $f''(x) > 0$: la fonction est convexe;
- pour $x = 1$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe : le point A est le point d'inflexion de (\mathcal{C}_f) .

b. Du signe de $f''(x)$ on en déduit les variations de f' qui est décroissante sur $]0; 1[$ puis croissante sur $]1; +\infty[$, donc $f'(1) = 2 + 1 = 3$ (vu à la question 1.).

Comme 3 est le minimum de f' , on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

4. a. Tableau de variations de f :

| | | | | |
|----------|---|---|----|----------------|
| x | 0 | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | | - | 0 | + |
| $f'(x)$ | | | 3 | |
| f | | | -1 | $\approx 2,27$ |

Sur l'intervalle $]1; 2[$ la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante avec $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un nombre unique $\alpha \in]1; 2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne $f(1,3) \approx -0,09$ et $f(1,4) \approx 0,23$ donc $1,3 < \alpha < 1,4$, puis $f(1,32) \approx -0,02$ et $f(1,33) \approx 0,007$, d'où $1,32 < \alpha < 1,33$ et enfin $f(1,327) \approx -0,003$ et $f(1,328) \approx 0,0004$, donc $\alpha \approx 1,33$ au centième près.

On sait que α est solution de $f(x) = 0 \iff x \ln(x^2) - \frac{1}{x} = 0 \iff$

$x \ln(x^2) = \frac{1}{x} \iff \ln(x^2) = \frac{1}{x^2}$ et enfin par croissance de la fonction exponentielle :

$$\exp(\ln(x^2)) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) \iff x^2 = \exp\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$\alpha \text{ vérifie cette équation donc } \alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

EXERCICE 4

6 points

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) dx, \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) dx.$$

1. $I_0 = \int_0^\pi 1 \times \sin(x) dx = \int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$

2. a. On sait que $0 \leq x \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{-nx} \sin(x) \leq e^{-nx}$ par produit par $e^{-nx} > 0$: la fonction à intégrer étant positive et l'intervalle d'intégration étant croissant on sait que l'intégrale de cette fonction positive est positive. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi e^{-(n+1)x} \sin(x) dx - \int_0^\pi e^{-(nx)} \sin(x) dx =$
 $\int_0^\pi \sin x [e^{-(n+1)x} - e^{-(nx)}] dx$ par linéarité de l'intégrale, puis
 $I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \sin x e^{-(nx)} [e^{-x} - 1] dx.$

Soit u la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par $u(x) = e^{-x} - 1$.

u est dérivable sur $[0 ; \pi]$ et sur cet intervalle $u'(x) = -e^{-x} < 0$. La fonction u est donc décroissante de $e^{-0} - 1 = 0$ à $e^{-\pi} - 1 \approx -0,957$.

Comme $\sin x e^{-(nx)} \geq 0$ et $e^{-x} - 1 < 0$, la fonction à intégrer dans $I_{n+1} - I_n$ est négative et donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

c. On vient de démontrer que $I_{n+1} - I_n \leq 0 \iff I_{n+1} \leq I_n$, c'est-à-dire que la suite (I_n) est décroissante; étant minorée par zéro elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$.

3. a. On a déjà vu que $0 \leq x \leq \pi \implies 0 \leq \sin x \leq 1 \implies 0 \leq e^{-nx} \sin(x) \leq e^{-nx}$, donc par intégration sur l'intervalle $[0 ; +\pi]$ on obtient

$$\int_0^\pi 0 dx \leq I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx.$$

$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx.$$

b. Une primitive de e^{-nx} est $\frac{1}{-n} e^{-nx}$, donc pour $n \geq 1$, $\int_0^\pi e^{-nx} dx = \left[\frac{1}{-n} e^{-nx} \right]_0^\pi = -\frac{1}{n} [e^{-n\pi} - e^0] = -\frac{1}{n} [e^{-n\pi} - 1] = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$.

c. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\pi} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-n\pi} = 1$ et enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n\pi}}{n} = 0$.
 D'après le théorème des « gendarmes » la suite (I_n) a pour limite 0.

4. a. • IPP1 On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-nx} & v'(x) &= \sin x \\ u'(x) &= -ne^{-nx} & v(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

On a donc $I_n = [-e^{-nx} \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi ne^{-nx} \cos x dx = e^{-n\pi} + 1 - nJ_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n$.

• IPP2 On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x & v'(x) &= e^{-nx} \\ u'(x) &= \cos x & v(x) &= \frac{1}{-n} e^{-nx} \end{aligned}$$

On a donc $I_n = \left[\frac{1}{-n} e^{-nx} \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x \frac{1}{-n} e^{-nx} dx = -\frac{1}{n} \int_0^\pi e^{-nx} \cos x dx = \frac{1}{n} J_n$.

b. En égalant les deux valeurs de I_n trouvées on obtient :

$$1 + e^{-n\pi} - nJ_n = \frac{1}{n} J_n \iff 1 + e^{-n\pi} = J_n \left(n + \frac{1}{n} \right)$$

$$\iff J_n \left(\frac{n^2 + 1}{n} \right) = 1 + e^{-n\pi} \iff J_n = \frac{n}{n^2 + 1} \times [1 + e^{-n\pi}].$$

En, reportant dans l'expression $I_n = \frac{1}{n} J_n$, on obtient finalement :

$$I_n = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n^2 + 1} \times [1 + e^{-n\pi}] = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}.$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1 from math import *
2 def seuil() :
3     n = 0
4     I = 2
5     while I >= 0.1 :
6         n=n+1
7         I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8     return n
```