

Sujet 2

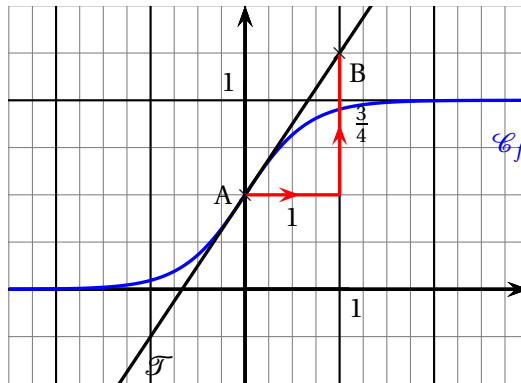
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}.$$



Partie A : lectures graphiques

1. Comme indiqué sur la figure pour aller de A en B points de la tangente : + 1 puis $+\frac{3}{4}$, donc coefficient directeur de $\frac{3}{4}$ et l'ordonnée à l'origine est égale à $\frac{1}{2}$.

$$M(x; y) \in \mathcal{T} \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

2. La fonction semble être convexe sur $]-\infty; 0]$ et concave sur $[0; +\infty[$.

Partie B : étude de la fonction

1. En posant $u(x) = 1 + e^{-3x}$, on a pour tout réel $u'(x) = -3e^{-3x}$.

$$\text{De } f(x) = \frac{1}{u(x)}, \text{ on a donc } f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{-3e^{-3x}}{(1 + e^{-3x})^2} = \frac{3e^{-3x}}{(1 + e^{-3x})^2}.$$

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-3x} > 0$, donc $1 + e^{-3x} > 1 > 0$ et $(1 + e^{-3x})^2 > 0$: tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro ; on a donc $f'(x) > 0$, sur \mathbb{R} . La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3. a. Avec $X = -3x$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$, d'où $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-3x} = 1$ et enfin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1.$$

Rem. la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f au voisinage de plus l'infini.

b. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = +\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{-3x}$ et enfin $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-3x}} = 0$.

Rem. la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f au voisinage de moins l'infini.

$$4. \text{ On a } f(x) = 0,99 \iff \frac{1}{1 + e^{-3x}} = 0,99 \iff 1 = 0,99(1 + e^{-3x}) \iff 1 = 0,99 + 0,99e^{-3x} \iff \\ 0,01 = 0,99e^{-3x} \iff \frac{0,01}{0,99} = e^{-3x} \iff \frac{1}{99} = e^{-3x}.$$

Par croissance de la fonction logarithme népérien :

$$\ln\left(\frac{1}{99}\right) = \ln(e^{-3x}) \iff \ln 1 - \ln 99 = -3x \iff -\ln 99 = -3x \iff x = \frac{\ln 99}{3} \quad (\text{valeur approchée à la calculatrice } 1,532).$$

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

$$\text{On a } M(x; y) \in \mathcal{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

- $f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$;
- $f'(0) = \frac{3}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$. Donc :

$$M(x; y) \in \mathcal{T} \iff y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x - 0) \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

$$f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}.$$

2. Comme $9e^{-3x} > 0$ et $(1 + e^{-3x})^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $e^{-3x} - 1$:

- $e^{-3x} - 1 = 0 \iff e^{-3x} = 1 \iff -3x = \ln 1 = 0 \iff x = 0$;
- $e^{-3x} - 1 > 0 \iff e^{-3x} > 1 \iff -3x > \ln 1 = 0 \iff x < 0$;
- $e^{-3x} - 1 < 0 \iff e^{-3x} < 1 \iff -3x < \ln 1 = 0 \iff x > 0$;

3. a. La question précédente a montré que la dérivée seconde est positive sur $] -\infty ; 0]$: la fonction f est convexe sur cet intervalle.

b. La dérivée seconde s'annule en $x = 0$ en changeant de signe, donc le point A de la courbe représentative d'abscisse 0 est le point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .

c. En chacun de ses points la courbe \mathcal{C}_f est convexe sur $] -\infty ; 0]$ donc au dessus de toutes les tangentes et en particulier en A la courbe est au dessus de la tangente en $x = 0$, donc en A, donc au dessus de \mathcal{T} .

De même en chacun de ses points la courbe \mathcal{C}_f est concave sur $] 0 ; +\infty]$ donc au dessous de toutes les tangentes et en particulier en A la courbe est au dessous de la tangente en $x = 0$, donc en A, donc au dessous de \mathcal{T} .

EXERCICE 2

5 points

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

1. $\ln u$ est défini si $u > 0$, soit $1 + x > 0 \iff x > -1$.

La fonction f est définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

2. En posant $u(x) = 1 + x$ et donc $u'(x) = 1$, on a alors si $f'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u(x)} = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ sur $] -1 ; +\infty[$.

3. a. On sait que $1 + x > 0$, donc le signe de la dérivée est celui de x :

- $f'(x) = 0 \iff x = 0$;
- $f'(x) > 0 \iff x > 0$: la fonction est croissante sur $[0 ; +\infty[$;
- $f'(x) < 0 \iff x < 0$; la fonction est décroissante sur $] -1 ; 0[$.

- b. La fonction f est décroissante sur $] -1 ; 0[$ puis croissante sur $[0 ; +\infty[$: elle a donc un minimum en $x = 0$, $f(0) = 0 - 0 = 0$.

Son minimum étant nul, on a donc sur $] -1 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

4. a. On sait que quel que soit le réel x , $x = \ln e^x$. On peut donc écrire :

$$f(x) = \ln e^x - \ln(1+x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right) \text{ par propriété de la fonction logarithme népérien :}$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

- b. En posant $u = 1 + x \iff x = u - 1$, on a $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right) = \ln\left(\frac{e^{u-1}}{u}\right) = \ln\left(\frac{e^u \times e^{-1}}{u}\right) = \ln\left(\frac{1}{e} \frac{e^u}{u}\right)$.

Or $x \rightarrow +\infty \implies x+1 = u \rightarrow +\infty$ et on sait que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$, donc $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} \frac{e^u}{u}\right) = +\infty$ et enfin $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

1. Avec $n = 0$, la relation de récurrence donne : $u_1 = u_0 - \ln(1 + u_0) = 10 - \ln(1 + 10) = 10 - \ln 11 \approx 7,602$.

2. *Initialisation* : on a $u_0 = 10 \geq 0$: l'inégalité est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$: d'après la question 3. a. la fonction est croissante sur $[0 ; +\infty[$, et $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$, donc $0 \leq u_{n+1}$: l'inégalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 0$.

3. On a $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n) \iff u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n)$.

Or on vient de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0 \implies 1 + u_n \geq 1$ puis par croissance de la fonction logarithme népérien $\ln(1 + u_n) \geq \ln 1$, soit $\ln(1 + u_n) \geq 0 \iff -\ln(1 + u_n) \leq 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ montre que la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0 converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geq 0$

5. On a $u_{n+1} = f(u_n)$. On a vu que cette fonction est dérivable donc continue sur $] -1 ; +\infty[$; de plus la suite (u_n) converge vers ℓ , donc à la limite :

$$\ell = \ell - \ln(1 + \ell) \iff \ln(1 + \ell) = 0 \text{ ou } \ln(1 + \ell) = \ln 1 \iff 1 + \ell = 1 \iff \ell = 0.$$

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

EXERCICE 3**5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(3; 0; 1), \quad B(2; 1; 2) \quad \text{et} \quad C(-2; -5; 1).$$

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$: ces coordonnées ne sont pas proportionnelles,

donc les vecteurs ne sont pas colinéaires; les trois points A, B et C définissent donc un plan noté (ABC).

2. On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \times (-5) + 1 \times (-5) + 1 \times 0 = 5 - 5 + 0 = 0$: les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux, les droites (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires en A et le triangle ABC est rectangle en A.

3. On a $A(3; 0; 1) \in ABC \iff -3 + 0 - 2 + 5 = 0$ égalité vraie;

$$B(2; 1; 2) \in ABC \iff -2 + 1 - 4 + 5 = 0 \text{ égalité vraie;}$$

$$A(-2; -5; 1) \in ABC \iff 2 - 5 - 2 + 5 = 0 \text{ égalité vraie.}$$

Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation donnée : comme il n'existe qu'un plan contenant trois points distincts non alignés une équation du plan ABC est :

$$M(x; y; z) \in ABC \iff -x + y - 2z + 5 = 0.$$

4. On considère le point S(1; -2; 4).

On sait qu'un vecteur normal au plan ABC a pour coordonnées les coefficients de x, y et z dans

$$\text{l'équation de ce plan. Donc on a } \vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La droite (Δ) orthogonale au plan ABC a un vecteur directeur colinéaire au vecteur \vec{n} .

Donc $M(x; y; z) \in (\Delta) \iff \overrightarrow{SM} = t \vec{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, ce qui se traduit par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x - 1 & = & -t \\ y - (-2) & = & 1t \\ z - 4 & = & -2t \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 1 - t \\ y & = & -2 + t \\ z & = & 4 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \iff M(x; y; z) \in (\Delta).$$

5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

Le point commun à la droite (Δ) et au plan ABC a ses coordonnées qui vérifient les équations de Δ et l'équation du plan, soit le système :

$$\begin{cases} x & = 1 - t \\ y & = -2 + t \\ z & = 4 - 2t \\ -x + y - 2z + 5 & = 0 \end{cases} \quad \text{En remplaçant } x, y \text{ et } z \text{ dans la dernière équation par leur valeur}$$

en fonction de t , on obtient :

$$-(1-t) + (-2+t) - 2(4-2t) + 5 = 0 \iff -1+t-2+t-8+4t+5 = 0 \iff 6t-6 = 0 \iff t = 1$$

On a donc $x = 1 - 1 = 0$, $y = -2 + 1 = -1$, $z = 4 - 2 = 2$, soit $H(0 ; -1 ; 2)$.

6. On a $SH^2 = (0-1)^2 + (-1-(-2))^2 + (2-4)^2 = 1 + 1 + 4 = 6$, donc $SH = \sqrt{6}$.

7. On considère le cercle \mathcal{C} , inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle \mathcal{D} le disque délimité par le cercle \mathcal{C} .

Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque \mathcal{D} . On a $HB^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + 0^2 = 4 + 4 = 4 \times 2$, d'où $HB = 2\sqrt{2}$.

L'aire du disque \mathcal{D} est égale à $\mathcal{A} = \pi \times HB^2 = 8\pi$.

8. (SH) est perpendiculaire au plan ABC du disque, donc [SH] est la hauteur du cône et la base est le disque \mathcal{D} , donc :

$$V = \frac{8\pi \times \sqrt{6}}{3}.$$

EXERCICE 4

5 points

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.

Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.

Dans les trois questions suivantes, on prend $n = 50$.

1. On a $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,04^0 \times 0,96^{50} \approx 1 - 0,1299 \approx 0,8701$ soit 0,870 au millième près : réponse **b**.

2. La probabilité $p(3 < X \leq 7)$ est égale à : $p(X \leq 7) - p(X \leq 3) \approx 0,9992 - 0,8609$ soit 0,1383. Réponse **b**.

3. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95% ?

La calculatrice donne $k = 4$, réponse **c**.

Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

a. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?

Réponse **a**.

b. On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?

La fonction donne le plus petit naturel n tel que $1 - 0,96^n \geq x$.

Réponse **a**.