

∞ Corrigé du baccalauréat Métropole 7 juin 2021 ∞

**Candidats libres Sujet 1**

**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

**EXERCICE 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ .

On donne  $f''$ , définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)}{x^3}$ .

1.  $f$  est dérivable comme fonction quotient de fonctions dérivables, le dénominateur étant non nul sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{2e^{2x} \times x - 1 \times e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x - 1)}{x^2}.$$

Réponse **c**.

2. Comme sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $x^2 > 0$  et  $e^{2x} > 0$ , le signe de  $f'(x)$  est celui de  $2x - 1$ .

$$+ f'(x) = 0 \iff 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2};$$

$$+ f'(x) < 0 \iff 2x - 1 < 0 \iff x < \frac{1}{2} : \text{ la fonction } f \text{ est décroissante sur } ]0; \frac{1}{2}[;$$

$$+ f'(x) > 0 \iff 2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2} : \text{ la fonction } f \text{ est croissante sur } ]\frac{1}{2}; +\infty[;$$

Conclusion :  $f(\frac{1}{2})$  est le minimum de la fonction sur  $]0; +\infty[$ .

Réponse **c**.

3. On a :  $f(x) = 2 \times \frac{e^{2x}}{2x}$ .

En posant  $X = 2x$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = \lim_{X \rightarrow +\infty} X = +\infty$ .

On sait que  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Réponse **a**.

4. Sur  $]0; +\infty[$ ,  $x^3 > 0$  et  $2e^{2x} > 0$ , donc le signe de  $f''(x)$  est celui du trinôme  $2x^2 - 2x + 1$ .

$$\text{Or } 2x^2 - 2x + 1 = 2(x^2 - x + \frac{1}{2}) = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Donc  $f''(x)$  somme de deux nombres positifs est positive sur  $]0; +\infty[$ . La fonction est donc convexe sur  $]0; +\infty[$ .

Réponse **b**.

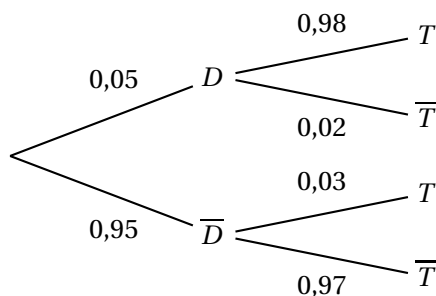
**EXERCICE 2**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

**PARTIE I**

1. On traduit la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. a. On a :  $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,05 \times 0,98 = 0,049$ .

b. On a de même :  $P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,95 \times 0,3 = 0,0285$ .

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0,049 + 0,0285 = 0,0775.$$

3. La valeur prédictive positive du test est égale à :

$$P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,049}{0,0775} \approx 0,6322, \text{ soit } 0,632 \text{ au millième près.}$$

Comme  $0,632 < 0,95$  on peut en déduire que le test n'est pas efficace.

## PARTIE II

1. Le choix de l'échantillon étant assimilé à un tirage avec remise et avec une probabilité constante de choisir un produit défectueux égale à  $0,05$ , on peut donc dire que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $p = 0,05$ .
2. On a :  $p(X = 0) = 0,05^0 \times 0,95^{20}$ .  
Donc la probabilité cherchée est  $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,95^{20} \approx 0,642$ , soit  $0,64$  au centième près.
3. On a :  $E = n \times p = 20 \times 0,05 = 1$ .  
Cela signifie que sur un grand nombre de tirages d'échantillons on trouvera 1 pièce défectueuse sur 20 pièces tirées.

### EXERCICE 3

6 points

Commun à tous les candidats

#### I – Premier modèle

En 10 minutes la température a augmenté de  $1,3 - (-19) = 1,3 + 19 = 20,3$  soit une augmentation de  $2,03$  °C.

Selon ce premier modèle l'augmentation de la température serait au bout de 25 minutes de  $25 \times 2,03 = 50,75$  (°C).

Les gâteaux seraient donc à une température de  $-19 + 50,75 = 31,75$  (°C) alors que la température ambiante est de  $25$ °C : c'est impossible, donc ce modèle n'est pas pertinent.

#### II – Second modèle

On note  $T_n$  la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de  $n$  minutes après leur sortie du congélateur; ainsi  $T_0 = -19$ . On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante : pour tout  $n$ ,  $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$ .

1. On a :  $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25) \iff T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5$   
 $\iff T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$ .
2. + Avec  $n = 0$ , la relation donne  $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = 1,5 - 17,86 = -16,36$ ;  
+ Avec  $n = 1$ , la relation donne  $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = 1,5 - 15,3784 = -13,8784$ .
3. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $T_n \leq 25$ .  
*Initialisation* -  $T_0 = -19 \leq 25$ ; l'inégalité est vraie au rang 0.  
*Hérédité* - Supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n \leq 25$  alors en multipliant par  $0,94$  :  
 $0,94T_n \leq 0,94 \times 25$ , soit  $0,94T_n \leq 23,5$ .  
D'où en en ajoutant à chaque membre  $1,5$  :  
 $0,94T_n + 1,5 \leq 23,5 + 1,5$ , soit finalement  $T_{n+1} \leq 25$  : l'inégalité est vraie au rang  $n$ .

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n$ , elle l'est aussi au rang  $n + 1$ .

D'après le principe de récurrence : quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n \leq 25$ .

Ceci correspond à une évidence : la température des gâteaux ne peut dépasser la température ambiante.

4. On sait que quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$ .

D'après la question précédente  $T_n \leq 25$  soit en multipliant par 0,06 :

$$0,06T_n \leq 0,06 \times 25, \text{ ou } 0,06T_n \leq 1,5$$

et en prenant les opposés :  $-1,5 \leq -0,06T_n$  et enfin en ajoutant à chaque membre 1,5 :

$$0 \leq -0,6T_n + 1,5.$$

On a donc démontré que quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+1} - T_n \geq 0$  : la suite  $(T_n)$  est donc croissante.

5. On a donc démontré que la suite  $(T_n)$  est croissante et majorée par 25 : d'après le théorème de la convergence monotone, cette suite converge vers une limite  $\ell$  telle que  $\ell \leq 25$ .

6. On pose pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = T_n - 25$ .

- a. Quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94T_n + 1,5 - 25$  ou encore

$$U_{n+1} = 0,94T_n - 23,5 = 0,94 \left( T_n - \frac{23,5}{0,94} \right) = 0,94(T_n - 25), \text{ soit finalement}$$

$T_{n+1} = 0,94U_n$  : cette égalité montre que la suite  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison 0,94 et de premier terme  $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$ .

- b. On sait que quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = U_0 \times 0,94^n$  ou  $U_n = -44 \times 0,94^n$ .

Or  $U_n = T_n - 25 \iff T_n = U_n + 25$  ou encore  $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$ , soit finalement :

$$T_n = 25 - 44 \times 0,94^n, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

- c. Comme  $0 < 0,94 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$ , d'où par somme de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \ell = 25.$$

7. a. On a :  $T_{30} = 25 - 44 \times 0,94^{30} \approx 18,12$  soit environ  $18^\circ\text{C}$  au degré près.  
 b. La calculatrice donne  $T_{17} \approx 9,63$  et  $T_{18} \approx 10,55$ , donc Cécile devra déguster son gâteau entre la 17<sup>e</sup> et la 18<sup>e</sup> minute après sa sortie.  
 c. On complète le programme suivant, écrit en langage Python, qui doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier  $n$  pour laquelle  $T_n \geq 10$ .

```
def seuil() :
    n = 0
    T = -19
    while T < 10
        T = 0,94T + 1,5
        n = n+1
    return n
```

## EXERCICE au choix du candidat

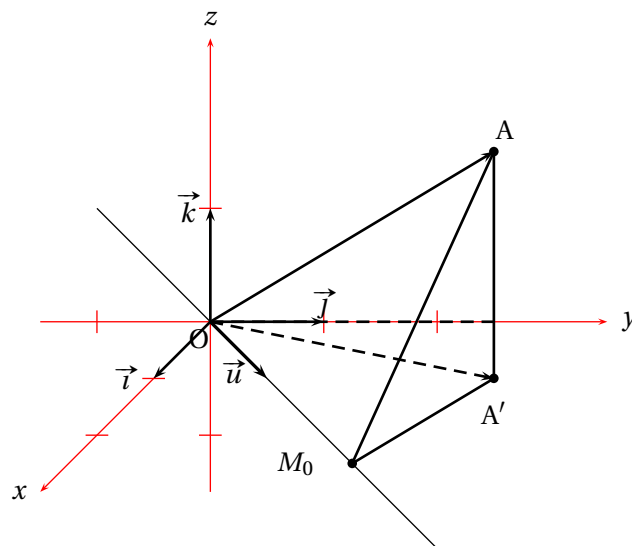
5 points

## EXERCICE A

Principaux domaines abordés :  
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé; orthogonalité dans l'espace

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère

- le point A de coordonnées  $(1; 3; 2)$ ,
- le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- la droite  $d$  passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur  $\vec{u}$ .



1.  $M(x; y; z) \in (d) \iff \overrightarrow{OM} = t\vec{u}$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ , soit : 
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. a. De  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} t-1 \\ t-3 \\ 0-2 \end{pmatrix}$ , on calcule :

$$AM^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 = t^2 + 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t + 4 = 2t^2 - 8t + 14.$$

b.  $2t^2 - 8t + 14 = 2(t^2 - 4t + 7) = 2[(t-2)^2 - 4 + 7] = 2[(t-2)^2 + 3]$ .

La plus petite valeur de ce trinôme est obtenue quand le carré est nul, soit pour  $t = 2$ .

On a :  $2t^2 - 8t + 14 \geq 6$ , soit  $AM^2 \geq 6 \Rightarrow AM \geq \sqrt{6}$ .

La plus petite distance est  $AM_0 = \sqrt{6}$  avec  $M_0(2; 2; 0)$ .

3. On a :  $\overrightarrow{AM_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $(d)$ .

On a :  $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$  : les vecteurs sont orthogonaux donc les droites  $(AM_0)$  et  $d$  sont orthogonales.

4.  $\vec{u}$  est orthogonal au plan horizontal d'équation  $z = 0$ . Comme  $A'$  et  $M_0$  appartiennent à ce plan le vecteur  $\vec{u}$  est orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{A'M_0}$ .

Donc le vecteur  $\vec{u}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $(AA'M_0)$ , donc la droite  $(d)$  est orthogonale au plan  $(AA'M_0)$ . Le point  $M_0$  est donc le projeté orthogonal de O sur le plan  $(AA'M_0)$ , donc  $OM_0$  est la distance la plus courte du point O au plan  $(AA'M_0)$ .

5. Aire de la base  $AA'M_0$  : on a  $AA' = 2$  et  $A'M_0^2 = (2-1)^2 + (2-3)^2 + 0^2 = 1+1 = 2$ . D'où  $A'M_0 = \sqrt{2}$ .

On a donc  $\mathcal{A}(AA'M_0) = \frac{2 \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ .

D'autre part :  $OM_0^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ , d'où  $OM_0 = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} = h$ .

Finalement  $V = \frac{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}$ .

**EXERCICE B**

On considère l'équation différentielle (E)  $y' = y + 2xe^x$

1. De  $u(x) = x^2e^x$ , on déduit que  $u'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 2x) = x^2e^x + 2xe^x$ , soit encore  $u'(x) = u(x) + 2xe^x$  ce qui signifie que  $u$  est une solution particulière de (E).

2. Soit  $g(x) = f(x) - u(x)$

- a.  $f$  est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si :

$$f'(x) = f(x) + 2xe^x \quad (1).$$

Or  $g(x) = f(x) - u(x) \iff f(x) = g(x) + u(x)$ , d'où on déduit, les deux fonctions étant dérivables sur  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = g'(x) + u'(x)$ .

L'égalité (1) devient :  $g'(x) + u'(x) = g(x) + u(x) + 2xe^x \quad (2)$ .

Or on a vu dans la question précédente que  $u'(x) = u(x) + 2xe^x$

L'équation (2) devient donc :  $g'(x) = g(x)$ , ce qui signifie que la fonction  $g$  est solution de l'équation différentielle :  $y' = y$ .

- b. On sait que les solutions de l'équation différentielle  $y' = y$  sont les fonctions définies par  $x \mapsto Ke^x$ , avec  $K \in \mathbb{R}$ .

Donc on a  $g(x) = Ke^x$ ,  $K \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = Ke^x + x^2e^x$ .

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies par :  $f(x) = (K + x^2)e^x$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .

3. Étude de la fonction  $u$

- a. On a  $u'(x) = x(x+2)e^x$ . Comme  $e^x > 0$ , quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ , le signe de  $u'(x)$  est celui du trinôme  $x(x+2)$  qui a pour racines  $-2$  et  $0$ .

On sait que ce trinôme est positif, sauf entre les racines :

$$u'(x) > 0 \text{ sur } ]-\infty; -2[ \cup ]0; +\infty[;$$

$$u'(x) < 0 \text{ sur } ]-2; 0[;$$

$$u'(-2) = u'(0) = 0.$$

- b. De la question précédente il suit que  $u$  est croissante sauf sur  $] -2 ; 0[$  où elle est décroissante,  $u(-2) = 4e^{-2}$  et  $u(0) = 0$  étant les deux extremums de la fonction sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$u$				

c.  $u'$  est un produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$u''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = e^x(x^2 + 4x + 2).$$

Comme  $e^x > 0$ , quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ , le signe de  $u''(x)$  est celui du trinôme  $x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 4 + 2 = (x + 2)^2 - 2 = (x + 2)^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + 2 + \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{2})$ .

Les racines de ce trinôme sont donc  $-\sqrt{2} - 2$  et  $-\sqrt{2} + 2$ .

Le trinôme donc  $u''(x)$  sont négatifs entre les racines.

Conclusion : la fonction est concave sur l'intervalle  $]-\sqrt{2} - 2; +\sqrt{2} - 2[$ .

