∽ Corrigé du baccalauréat Métropole 7 juin 2021 ∾

Candidats libres Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$.

On donne f'', définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f''(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}\left(2x^2-2x+1\right)}{x^3}$.

1. f est dérivable comme fonction quotient de fonctions dérivables, le dénominateur étant non nul sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On a : $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} \times x - 1 \times \mathrm{e}^{2x}}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$. Réponse **c.**
2. Comme sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $x^2 > 0$ et $\mathrm{e}^{2x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-1$.
   - $f'(x) = 0 \iff 2x-1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$;
   - $f'(x) < 0 \iff 2x-1 < 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$: la fonction f est décroissante sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$;
   - $f'(x) > 0 \iff 2x-1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$: la fonction f est croissante sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$;

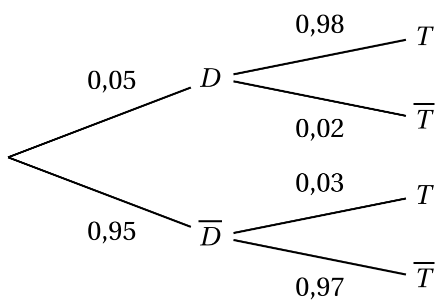
   Conclusion : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est le minimum de la fonction sur $]0\ ;\ +\infty[$. Réponse **c.**
3. On a : $f(x) = 2 \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}$.
   En posant $X = 2x$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty$.
   On sait que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Réponse **a.**
4. Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $x^3 > 0$ et $2\mathrm{e}^{2x} > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est celui du trinôme $2x^2-2x+1$.
   Or $2x^2-2x+1 = 2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right] = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$.
   Donc $f''(x)$ somme de deux nombres positifs est positive sur $]0\ ;\ +\infty$. La fonction est donc convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$. Réponse **b.**

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE I

1. On traduit la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. **a.** On a : $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,05 \times 0,98 = 0,049$.

b. On a de même : $P\left(\overline{D}\cap T\right) = P\left(\overline{D}\right)\times P_{\overline{D}}(T) = 0,95\times 0,3 = 0,0285$.
D'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(D\cap T) + P\left(\overline{D}\cap T\right) = 0,049 + 0,0285 = 0,0775$.

3. La valeur prédictive positive du test est égale à :
$P_T(D) = \dfrac{P(T\cap D)}{P(T)} = \dfrac{P(D\cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,049}{0,0775} \approx 0,6322$, soit 0,632 au millième près.
Comme $0,632 < 0,95$ on peut en déduire que le test n'est pas efficace.

PARTIE II

1. Le choix de l'échantillon étant assimilé à un tirage avec remise et avec une probabilité constante de choisir un produit défectueux égale à $0,05$, on peut donc dire que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.

2. On a : $p(X = 0) = 0,05^0\times 0,95^{20}$.
Donc la probabilité cherchée est $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,95^{20} \approx 0,642$, soit 0,64 au centième près.

3. On a : $E = n\times p = 20\times 0,05 = 1$.
Cela signifie que sur un grand nombre de tirages d'échantillons on trouvera 1 pièce défectueuse sur 20 pièces tirées.

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

I – Premier modèle

En 10 minutes la température a augmenté de $1,3-(-19) = 1,3+19 = 20,3$ soit une augmentation de $2,03$ °C.
Selon ce premier modèle l'augmentation de la température serait au bout de 25 minutes de $25\times 2,03 = 50,75$(°C).
Les gâteaux seraient donc à une température de $-19 + 50,75 = 31,75$(°C) alors que la température ambiante est de 25°C : c'est impossible, donc ce modèle n'est pas pertinent.

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur; ainsi $T_0 = -19$. On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante : pour tout n, $T_{n+1} - T_n = -0,06\times(T_n - 25)$.

1. On a : $T_{n+1} - T_n = -0,06\times(T_n - 25) \iff T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5$
$\iff T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 \iff T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.

2. ✦ Avec $n = 0$, la relation donne $T_1 = 0,94\times(-19) + 1,5 = 1,5 - 17,86 = -16,36$;
✦ Avec $n = 1$, la relation donne $T_2 = 0,94\times(-16,36) + 1,5 = 1,5 - 15,3784 = -13,8784$.

3. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n \leqslant 25$.
Initialisation - $T_0 = -19 \leqslant 25$; l'inégalité est vraie au rang 0.
Hérédité - Supposons que pour $n\in\mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$ alors en multipliant par 0,94 :
$0,94T_n \leqslant 0,94\times 25$, soit $0,94T_n \leqslant 23,5$.
D'où en en ajoutant à chaque membre 1,5 :
$0,94T_n + 1,5 \leqslant 23,5 + 1,5$, soit finalement $T_{n+1} \leqslant 25$: l'inégalité est vraie au rang n.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leqslant 25$.

Ceci correspond à une évidence : la température des gâteaux ne peut dépasser la température ambiante.

4. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

D'après la question précédente $T_n \leqslant 25$ soit en multipliant par 0,06 :

$0,06T_n \leqslant 0,06 \times 25$, ou $0,06T_n \leqslant 1,5$

et en prenant les opposés : $-1,5 \leqslant -0,06T_n$ et enfin en ajoutant à chaque membre 1,5 :

$0 \leqslant -0,6T_n + 1,5$.

On a donc démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \geqslant 0$: la suite (T_n) est donc croissante.

5. On a donc démontré que la suite (T_n) est croissante et majorée par 25 : d'après le théorème de la convergence monotone, cette suite converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 25$.

6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94T_n + 1,5 - 25$ ou encore

$U_{n+1} = 0,94T_n - 23,5 = 0,94\left(T_n - \dfrac{23,5}{0,94}\right) = 0,94\,(T_n - 25)$, soit finalement

$T_{n+1} = 0,94U_n$: cette égalité montre que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,94 et de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

b. On sait que quel soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times 0,94^n$ ou $U_n = -44 \times 0,94^n$.

Or $U_n = T_n - 25 \iff T_n = U_n + 25$ ou encore $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$, soit finalement :

$$T_n = 25 - 44 \times 0,94^n, \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}$$

c. Comme $0 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,94^n = 0$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \ell = 25.$$

7. **a.** On a : $T_{30} = 25 - 44 \times 0,94^{30} \approx 18,12$ soit environ 18°C au degré près.

b. La calculatrice donne $T_{17} \approx 9,63$ et $T_{18} \approx 10,55$, donc Cécile devra déguster son gâteau entre la 17^e et la 18^e minute après sa sortie.

c. On complète le programme suivant, écrit en langage Python, qui doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil() :
    n = 0
    T = −19
    while T < 10
            T = 25 − 0,94T
            n = n+1
    return
```

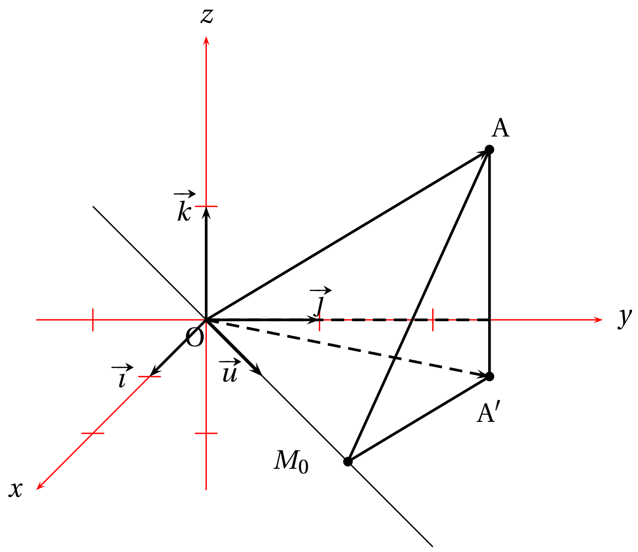
EXERCICE au choix du candidat **5 points**

EXERCICE A

Principaux domaines abordés :
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



1. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \overrightarrow{OM} = t\,\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& 0\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

2. **a.** De $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}t-1\\t-3\\0-2\end{pmatrix}$, on calcule :

$AM^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 = t^2 + 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t + 4 = 2t^2 - 8t + 14.$

b. $2t^2 - 8t + 14 = 2\left(t^2 - 4t + 7\right) = 2\left[(t-2)^2 - 4 + 7\right] = 2\left[(t-2)^2 + 3\right]$.

La plus petite valeur de ce trinôme est obtenue quand le carré est nul, soit pour $t = 2$.

On a : $2t^2 - 8t + 14 \geqslant 6$, soit $AM^2 \geqslant 6 \Rightarrow AM \geqslant \sqrt{6}$.

La plus petite distance est $AM_0 = \sqrt{6}$ avec $M_0(2\,;\,2\,;\,0)$.

3. On a : $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

On a : $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. $\vec{u}$ est orthogonal au plan horizontal d'équation $z = 0$. Comme A′ et M_0 appartiennent à ce plan le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{A'M_0}$.

Donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\left(AA'M_0\right)$,donc la droite (d) est orthogonale au plan $\left(AA'M_0\right)$. Le point M_0 est donc le projeté orthogonal de O sur le plan $\left(AA'M_0\right)$, donc OM_0 est la distance la plus courte du point O au plan $\left(AA'M_0\right)$.

5. Aire de la base $\text{AA}'M_0$: on a $\text{AA}' = 2$ et $\text{A}'M_0^2 = (2-1)^2 + (2-3)^2 + 0^2 = 1 + 1 = 2$. D'où $\text{A}'M_0 = \sqrt{2}$.
On a donc $\mathcal{A}\left(\text{AA}'M_0\right) = \dfrac{2 \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
D'autre part : $\text{O}M_0^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, d'où $\text{O}M_0 = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} = h$.
Finalement $V = \dfrac{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4}{3}$.

EXERCICE B

On considère l'équation différentielle $(E) \quad y' = y + 2x\text{e}^x$

1. De $u(x) = x^2\text{e}^x$, on déduit que $u'(x) = 2x\text{e}^x + x^2\text{e}^x = \text{e}^x\left(x^2 + 2x\right) = x(x+2)\text{e}^x$.
Donc u solution de (E) si et seulement si :
$u' = u + 2x\text{e}^x \iff 2x\text{e}^x + x^2\text{e}^x = x^2\text{e}^x + 2x\text{e}^x$ qui est vraie : u est une solution particulière de (E).

2. Soit $g(x) = f(x) - u(x)$

a. f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si :
$f'(x) = f(x) + 2x\text{e}^x \quad (1)$.
Or $g(x) = f(x) - u(x) \iff f(x) = g(x) + u(x)$, d'où on déduit, les deux fonctions étant dérivables sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = g'(x) + u'(x)$.
L'égalité (1) devient : $g'(x) + u'(x) = g(x) + u(x) + 2x\text{e}^x \quad (2)$.
Or on a vu dans la question précédente que $u'(x) = u(x) + 2x\text{e}^x$
L'équation (2) devient donc : $g'(x) = g(x)$, ce qui signifie que la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.

b. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = y$ sont les fonctions définies par $x \longmapsto K\text{e}^x, \quad K \in \mathbb{R}$.
Donc on a $g(x) = K\text{e}^x$, $K \in \mathbb{R}$ et $f(x) = K\text{e}^x + x^2\text{e}^x$.
Les solutions de l'équation (E) : $f(x) = \left(K + x^2\right)\text{e}^x, \quad K \in \mathbb{R}$.

3. Étude de la fonction u

a. On a $u'(x) = x(x+2)\text{e}^x$. Comme $\text{e}^x > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $u'(x)$ est celui du trinôme $x(x+2)$ qui a pour racines -2 et 0.
On sait que ce trinôme est positif, sauf entre les racines :
$u'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,-2[\cup[0\,;\,+\infty[$;
$u'(x) < 0$ sur $]-2\,;\,0[$;
$u'(-2) = u'(0) = 0$.

b. De la question précédente il suit que u est croissante sauf sur $]-2\,;\,0[$ où elle est décroissante, $u(-2) = 4\text{e}^{-2}$ et $u(0) = 0$ étant les deux extremums de la fonction sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
u		$\nearrow$	4e^{-2}	$\searrow$	0	$\nearrow$	

c. u' est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$:
$u''(x) = (2x+2)\mathrm{e}^x + \left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(x^2+4x+2\right)$.
Comme $\mathrm{e}^x > 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le signe de $u''(x)$ est celui du trinôme $x^2+4x+2 = (x+2)^2-4+2 = (x+2)^2-2 = (x+2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(x+2+\sqrt{2}\right)\left(x+2-\sqrt{2}\right)$.
Les racines de ce trinôme sont donc $-\sqrt{2}-2$ et $-\sqrt{2}+2$.
Le trinôme donc $u''(x)$ sont négatifs entre les racines.
Conclusion : la fonction est concave sur l'intervalle $\left]-\sqrt{2}-2\,;\,+\sqrt{2}-2\right[$.