

✎ Corrigé du baccalauréat spécialité Jour 1 ✎

Métropole Antilles-Guyane 8 septembre 2022

Exercice 1 7 points

Thèmes : fonctions, suites

1. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}.$$

On a pour tout réel x , $g(x) = \frac{e^x \times 2}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$. Réponse **b**.

2. La dérivée seconde f'' est positive sur les intervalles $] -\infty ; -1[$ et $[2 ; +\infty[$, donc la fonction f est convexe sur ces intervalles. Réponse **c**.

3. On a pour tout naturel n :

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0,5a_n + 1 - 2 = 0,5a_n - 1 = 0,5(a_n - 2) = 0,5b_n.$$

L'égalité $b_{n+1} = 0,5b_n$ montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

Réponse **d**.

4. • Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$;

• On a $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{n}{n+1} = 1$.

On a donc $1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n \leq 2 - \frac{n}{n+1}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{n}{n+1} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. Réponse **b**.

5. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

Si $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$, alors $F'(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x} = x^2 \ln x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x = f(x)$. Réponse **a**.

6. $2 + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1} = \frac{2e^{-x} + 2 + 3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1} = \frac{5e^{-x} - 3}{e^{-x} + 1}$; en multipliant chaque terme par e^x , on obtient : $\frac{5 - 3e^x}{1 + e^x}$. Réponse **a**.

Exercice 2 7 points

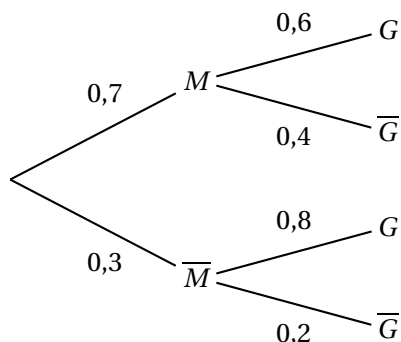
Thème probabilités

1. a. On a $p(M) = 0,7$, donc $p(\overline{M}) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Or $p(\overline{M} \cap \overline{G}) = 0,06$ donc

$$p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0,06 \iff 0,3 \times p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0,06 \iff p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0,2.$$

b. On complète l'arbre pondéré :



c. La probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » est : $p(\overline{M} \cap \overline{G}) = p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

d. On a de même $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(G) = p(M \cap G) + p(\overline{M} \cap G) = 0,42 + 0,24 = 0,66.$$

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée.

$$\text{On calcule } p_G(M) = \frac{p(G \cap M)}{p(G)} = \frac{p(M \cap G)}{p(G)} = \frac{0,42}{0,66} = \frac{42}{66} = \frac{21}{33} = \frac{7}{11} \approx 0,64 > 0,5.$$

L'affirmation est exacte.

3. a. On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

b. D'après le tableau précédent :

$$E(T) = 17 \times 0,42 + 12 \times 0,28 + 5 \times 0,24 + 0 \times 0,06 = 7,14 + 3,36 + 1,2 = 11,7.$$

Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.

c. Soit x le nombre minimum de visiteurs, x doit vérifier :

$$11,7 \times x > 700 \iff x > \frac{700}{11,7}. \text{ Or } \frac{700}{11,7} \approx 59,8.$$

Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	$12 + g$	12	g	0

L'espérance devient :

$$E = 0,42(12 + g) + 12 \times 0,28 + 0,24 \times g + 0 \times 0,06 = 5,04 + 0,42g + 3,36 + 0,24g = 8,4 + 0,66g.$$

Le responsable veut que :

$$8,4 + 0,66g = 15 \iff 0,66g = 6,6 \iff g = 10.$$

Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, chaque visiteur a donc en moyenne une probabilité de 0,66 de visiter la grotte.

La variable aléatoire G égale au nombre de visiteurs de la grotte suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,66)$.

Il faut donc trouver $p(G > 75)$. La calculatrice donne $\approx 0,9797$, soit 0,980 au millième près.

Exercice 3 7 points

Thème fonctions logarithmes et exponentielles, suites

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de la fonction f au voisinage de plus l'infini.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

- a. En dérivant $f(x)$ comme un quotient, on obtient pour $x \geq 1$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

- b. Quel que soit x , $x^2 \geq 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - \ln x$:

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff e > x$: $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1; e]$;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff e < x$: $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[e; +\infty[$.
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff e = x$.

On a donc le tableau de signes de $f'(x)$:

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

- c. $f(1) = 0$ et $f(e) = \frac{1}{e}$; on dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[1; +\infty[$.

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0

3. a. D'après le tableau de variations sur l'intervalle $[1; e]$, la fonction est strictement croissante de 0 à $\frac{1}{e}$: l'équation $f(x) = k$ avec $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$ a donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires une solution unique.
- b. D'après le tableau de variations $f(x) \leq \frac{1}{e}$ (maximum de f) : l'équation $f(x) = k$ avec $k > \frac{1}{e}$ n'a donc pas de solution

Partie B

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^{\frac{x}{4}}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :
- $g'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}$: produit de deux facteurs supérieurs à zéro, cette dérivée est supérieure à zéro, donc g est croissante sur \mathbb{R} .
2. Soit \mathcal{P}_n la propriété $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.
- *Initialisation*
 $u_0 = 1$ et $u_1 = e^{u_0} = e^1 = e$. On a bien : $u_0 \leq u_1 \leq e$; la propriété est vraie pour $n = 0$.
 - *Hérédité*
 Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.
 Par croissance de la fonction g , on a : $g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(e)$ soit
 $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq g(e)$
 Or $g(e) = e^{\frac{e}{4}} \approx 1,97$; donc $g(e) \leq e$ et l'encadrement précédent devient :
 $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq e$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.
 - *Conclusion*
 L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il est vrai au rang $n + 1$; d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.
3. L'encadrement précédent montre :
- que la suite (u_n) est croissante;
 - que la suite (u_n) est majorée par e .

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite inférieure ou égale à e .

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation : $e^{\frac{x}{4}} = x$.

4. Quel que soit $x > 0$, $e^{\frac{x}{4}} = x \iff \frac{x}{4} = \ln x$, par croissance de la fonction \ln .
- Or $\frac{x}{4} = \ln x \iff \frac{1}{4} = \frac{\ln x}{x}$, soit finalement : $f(x) = \frac{1}{4}$ avec f fonction définie dans la partie A.

5. On a : $e < 4$ donc $\frac{1}{4} < \frac{1}{e}$ donc $0 \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{e}$.

D'après la question 3. a. de la partie A, l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ a donc une solution unique sur l'intervalle $[1; e]$.

La calculatrice donne : $f(1) = 0$ et $f(2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,346$;

$f(1,4) \approx 0,24$ et $f(1,5) \approx 0,27$, donc $1,4 < \ell < 1,5$;

$f(1,42) \approx 0,247$ et $f(1,43) \approx 0,251$, donc $1,42 < \ell < 1,43$;

$f(1,429) \approx 0,2498$ et $f(1,430) \approx 0,2501$, donc $1,429 < \ell < 1,430$;

Finalement $\ell \approx 1,43$ au centième près.

Exercice 4 7 points

Thème : géométrie dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1; -1; 3), \quad B(1; 1; 2), \quad C(1; -1; 7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1; 6; 8)$ et $E(11; -9; 2)$.

1. a. Avec $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix}$, on peut prendre comme vecteur directeur de Δ : $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a $M(x; y; z) \in (DE) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{DM} = t\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$, soit

$$\begin{cases} x+1 = 4t \\ y-6 = -5t \\ z-8 = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = -1+4t \\ y = 6-5t \\ z = 8-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

b. La droite Δ' est parallèle à Δ donc elle a les mêmes vecteurs directeurs que Δ . De plus, elle passe par l'origine O du repère donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0+4t \\ y = 0-5t \\ z = 0-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ soit } \begin{cases} x = 4t \\ y = -5t \\ z = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

c. $F(1,36; -1,7; -0,7) \in \Delta' \iff \begin{cases} 1,36 = 4t \\ -1,7 = -5t \\ -0,7 = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$

Les deux premières équations donnent $t = 0,34$ et la dernière $t = 0,35$.

Donc $F \notin \Delta$.

2. a. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les trois points A, B et C définissent un plan.

b. On a $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 - 10 + 2 = 0$;

De même $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 + 0 - 8 = 0$.

Donc \overrightarrow{DE} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC); il est normal à ce plan.

c. D'après la question précédente on sait que :

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff 4x - 5y - 2z + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}$$

Or $A(-1; -1; 3) \in (ABC)$ donc $4 \times (-1) - 5 \times (-1) - 2 \times 3 + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$, soit $-5 + d = 0 \iff d = 5$.

$$\text{Conclusion : } M(x; y; z) \in (ABC) \iff 4x - 5y - 2z + 5 = 0.$$

$$3. \quad \text{a. } G(7; -4; 4) \in \Delta \iff \begin{cases} 7 = -1 + 4t \\ -4 = 6 - 5t \\ 4 = 8 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Ces trois équations ont pour solution $t = 2$, donc $G(7; -4; 4) \in \Delta$.

b. Le point H appartient à la droite Δ et au plan (ABC). Donc ses coordonnées x, y, z vérifient le système :

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 6 - 5t \\ z = 8 - 2t \\ 4x - 5y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$$4(-1 + 4t) - 5(6 - 5t) - 2(8 - 2t) + 5 = 0 \iff -4 + 16t - 30 + 25t - 16 + 4t + 5 = 0 \iff 45t - 45 = 0 \iff 45t = 45 \iff t = 1.$$

Les coordonnées de H sont donc $(-1 + 4; 6 - 5; 8 - 2)$ soit $H(3; 1; 6)$.

c. La distance du point G au plan (ABC) est donc égale à GH.

$$\text{Or } GH^2 = (3 - 7)^2 + (1 + 4)^2 + (6 - 4)^2 = 16 + 25 + 4 = 45, \text{ d'où}$$

$$GH = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

4. a. D'après la question 2. a., on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + 2 \times 0 + 4 \times (-1) = 4 - 4 = 0$: les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en A.

b. En prenant comme base le triangle ABC, la hauteur correspondante est GH, donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times GH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AC \times GH.$$

$$\text{On a } AB^2 = 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 4 + 4 + 1 = 9, \text{ donc } AB = 3;$$

$$AC^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20, \text{ donc } AC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Donc } V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 15.$$