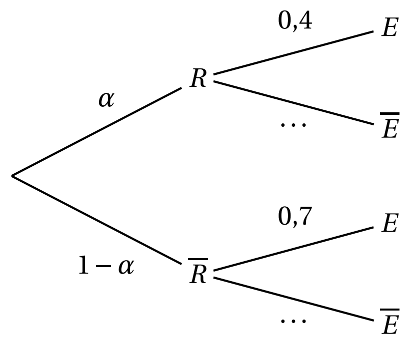
∽ Corrigé du baccalauréat spécialité Jour 2 ∾
Métropole Antilles-Guyane 9 septembre 2022

Exercice 1 7 points **Thèmes : probabilités**

1. Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.



2. **a.** • $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = \alpha \times 0,4 = 0,4\alpha$;

• $p\left(\overline{R} \cap E\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(E) = (1-\alpha) \times 0,7 = 0,7(1-\alpha) = 0,7 - 0,7\alpha$;

D'après la loi des probabilités totales :

$p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right) = 0,4\alpha + 0,7 - 0,7\alpha = 0,7 - 0,3\alpha$.

b. On sait que $p(E) = 0,58$, donc d'après le résultat précédent :

$0,58 = 0,7 - 0,3\alpha \iff 0,3\alpha = 0,7 - 0,58 \iff 0,3\alpha = 0,12 \iff \alpha = 0,4$.

En moyenne 40 % des clients louent un vélo de route.

On a : $p_E\left(\overline{R}\right) = \dfrac{E \cap \overline{R}}{p(E)} = \dfrac{\overline{R} \cap E}{p(E)} = \dfrac{0,6 \times 0,7}{0,58} = \dfrac{42}{58} = \dfrac{21}{29} \approx 0,724$, soit 0,72 au centième près.

4. On a $p\left(\overline{R} \cap E\right) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$.

5. **a.**

évènement	$R \cap E$	$R \cap \overline{E}$	$\overline{R} \cap E$	$\overline{R} \cap \overline{E}$
probabilité	0,16	0,24	0,42	0,18
prix de la location	40	25	50	35

b. On a $E(X) = 0,16 \times 40 + 0,24 \times 25 + 0,42 \times 50 + 0,18 \times 35 = 6,4 + 6 + 21 + 6,3 = 39,7$.

Sur un grand nombre de locations chaque location rapportera à Hugo 39,70 €.

6. **a.** Le nombre de loueurs est assez grand pour que l'on puisse considérer que chacun d'eux prend un vélo électrique avec la même probabilité de 58 %. le tirage étant considéré comme avec remise, on peut dire que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(30 ; 0,58)$.

b. On a donc $p(Y = 20) = \binom{30}{20} 0,58^{20} \times (1 - 0,58)^{30-20} \approx 0,9524$ soit 0,952 au millième près.

c. La calculatrice donne : $p(Y \leqslant 14) \approx 0,1419$, donc $p(Y \geqslant 15) \approx 1 - 0,1419 \approx 0,8581$, soit 0,858 au millième près

Exercice 2 7 points **Thèmes : suites, fonctions**

1. On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.
   On peut affirmer que :

   a. (a_n) est arithmétique ; **b.** (b_n) est géométrique ;
   c. (a_n) est géométrique ; **d.** (b_n) est arithmétique.

   On a pour tout naturel n :
   $b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0,5a_n + 1 - 2 = 0,5a_n - 1 = 0,5(a_n - 2) = 0,5b_n$.
   l'égalité $b_{n+1} = 0,5b_n$ montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
2. On calcule $u_1 = 5$, $v_1 = 3$, $u_2 = 14$, $v_2 = 8$.
   On constate alors que $\dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{14}{8} = \dfrac{7}{4} = 1,75$.
3. Le programme calcule tous les termes depuis u_1 et v_1 jusqu'à u_{10} et v_{10}.
   La bonne réponse est **d.**
4. f' est croissante sur $[-4 ; 0]$, donc f est convexe sur cet intervalle : réponse **b.**
5. La tangente à la courbe $\mathscr{C}'$ au point a pour coefficient directeur le nombre dérivé $f''(1)$.
   Or $f''(1) = \dfrac{-5}{1} = -5$, donc **d.** est vraie.
6. Avec $F(x) = \left(x^2 - 2x + 3\right)\mathrm{e}^x$, on en déduit :
   $F'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x + \left(x^2 - 2x + 3\right)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(2x - 2 + x^2 - 2x + 3\right) = \mathrm{e}^x\left(x^2 + 1\right) = f(x)$. Donc réponse **a.**

Exercice 3 7 points **Thèmes : fonction logarithme, suites**

Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x - x\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
2. On a $f(x) = x(1 - \ln x)$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. **a.** f est dérivable comme différence d et produit de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 1 - \ln x - x \times \dfrac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$.
   On sait que $\ln x > 0 \iff x > 1$, donc $-\ln x < 0 \iff x > 1$: $f'(x) < 0$ sur $]1 ; +\infty[$: la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$;
   $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$, donc $-\ln x > 0 \iff 0 < x < 1$: $f'(x) > 0$ sur $]0 ; 1[$: la fonction est croissante sur $]0 ; 1[$.

b. La fonction f est donc croissante de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1 - 0 = 1$, puis décroissante de $f(1) = 1$ à $-\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. Sur $]0~;~+\infty[$, $\quad f(x) = x \iff x - x\ln x = x \iff 0 = x\ln x \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & 0 \\ \ln x & = & 0 \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 0 \\ x & = & 1 \end{array}\right.$
Conclusion $S = \{0~;~1\}$.

Partie B

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
b. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x\ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = \mathrm{e}^{k} - 1$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k = y_k$.

Exercice 4 7 points **Thèmes : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on considère :

- la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A$(2~;~4\,;\,0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathscr{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 3 \\ y & = & 3 + t \\ z & = & 3 + t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ de la droite $\mathscr{D}'$.
b. Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M$'$ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance MM$'$ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. En déduire qu'une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x - y - 5z = 0$.

c. On rappelle que M$'$ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
Justifier que M$'$ est également le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.
En déduire que les coordonnées du point M$'$ sont $(3\,;\ 1\,;\ 1)$.

4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Justifier que le point M a pour coordonnées $(1\,;2\,;0)$.

c. Calculer la distance MM$'$.

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5t\\ y &=& 2+5t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.
Exprimer le volume du tétraèdre ANMM$'$ en fonction de ℓ.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres $\mathrm{AN}_1\mathrm{MM}'$ et $\mathrm{AN}_2\mathrm{MM}'$ ont le même volume.