Corrigé du baccalauréat STI2D et STL spécialité SPCL
Métropole - La Réunion – 16 juin 2017

Exercice 1 — 6 points

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir. On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0,1 gramme de gaz chaque jour. Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 660 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.
Le système perd 0,1 gramme chaque jour donc en n jours il perd $0{,}1 \times n$ grammes.
À pleine charge le réservoir contient 660 grammes et on doit le recharger dès que la masse de gaz est inférieure à 440 grammes ; il faut donc chercher n pour que $660 - 0{,}1 \times n < 440$ ce qui équivaut à $220 < 0{,}1 \times n$ ou encore $n > 2\,200$.
Il faut donc recharger le réservoir au bout de 2 200 jours.

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0,1 gramme, le système perd 1 % de sa masse chaque jour. Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.
On a donc, $u_0 = 660$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}99u_n - 0{,}1$.

1. $u_1 = 0{,}99 \times u_0 - 0{,}1 = 0{,}99 \times 660 - 0{,}1 = 653{,}3$ grammes.
   $u_2 = 0{,}99 \times u_1 - 0{,}1 = 0{,}99 \times 653n3 - 0{,}1 \approx 646{,}7$ grammes.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système :

Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u

   a. On complète la partie relative au **traitement** de cet algorithme :

Traitement
    Pour k allant de 1 à N
        u prend la valeur $0{,}99u - 0{,}1$
    Fin pour

   b. Au bout de 20 jours il restera $u_{20} \approx 538$ grammes (à la calculatrice).

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 10$.

a. $v_0 = u_0 + 10 = 660 + 10 = 670$.

b. On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,99 ; alors, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 670 \times 0{,}99^n$.

c. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + 10$ donc $u_n = v_n - 10$; d'après la question précédente, $v_n = 670 \times 0{,}99^n$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 670 \times 0{,}99^n - 10$.

d. $u_{20} = 670 \times 0{,}99^{20} - 10 \approx 538$, ce qui est le résultat obtenu à la question 2.b.

4. On rappelle que le constructeur préconise de recharger le réservoir au plus tard lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 g. Le coût d'une recharge est de 80 euros. Le garagiste propose de réparer le système pour 400 euros.

- Si le système est en état de marche correcte, c'est-à-dire réparé, il faut recharger au bout de 2 200 jours ; si l'automobiliste répare son système, il va dépenser 400 euros de réparation et 80 euros de recharge, soit un total de 480 euros. Il sera tranquille ensuite pour 2 200 jours.
- Si l'automobiliste ne fait pas réparer son système, on va chercher au bout de combien de jours il doit recharger sa climatisation et combien de fois il le fera en 2 200 jours.

  En utilisant la calculatrice, on trouve $u_{39} \approx 443$ et $u_{40} \approx 438$ donc la masse devient inférieure à 440 grammes au bout de 40 jours ; le conducteur doit donc recharger sa climatisation tous les 40 jours.

  $\dfrac{2\,200}{40} = 55$ donc il faut recharger le système 55 fois en 2 200 jours, ce qui coûte $55 \times 80 = 4\,400$ euros.

En faisant réparer, l'automobiliste dépense 480 euros pour 2200 jours ; s'il ne fait pas réparer, ça lui coûterait 4400 euros pour la même durée.

Il est donc nettement plus économique pour l'automobiliste de réparer son système.

Exercice 2 — 5 points

La fonte GS (graphite sphéroïdal) possède des caractéristiques mécaniques élevées et proches de celles des aciers. Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS qui sont utilisées dans l'industrie automobile.

Ces pièces sont coulées dans des moules de sable et ont une température de 1400 °C à la sortie du four. Elles sont entreposées dans un local dont la température ambiante est maintenue à une température de 30 °C. Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à 650 °C.

La température en degrés Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t, exprimé en heures, depuis sa sortie du four. On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle : $y' + 0{,}065y = 1{,}95$.

1. a. On veut résoudre sur $[0 ; +\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0{,}065y = 1{,}95$.

D'après le cours, l'équation différentielle $y' + ay = b$ (avec $a \neq 0$) admet pour solution générale les fonctions f définies par $f(t) = C \times \mathrm{e}^{-0{,}065t} + \dfrac{b}{a}$ où C est un réel quelconque ; ici $a = 0{,}065$ et $b = 1{,}95$ donc $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1{,}95}{0{,}065} = 30$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}065y = 1{,}95$ sont donc les fonctions f définies sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}065t} + 30$.

b. D'après le texte, la température à la sortie du four, c'est-à-dire pour $t = 0$, est de 1 400 °C, donc $f(0) = 1400$.

On cherche donc le réel C tel que $f(0) = 1400$ ce qui équivaut à $C\,\mathrm{e}^{-0{,}065\times 0} + 30 = 1400 \iff C = 1370$.

La solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = 0$ est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 1370\,\mathrm{e}^{-0{,}065t} + 30$.

2. a. Sur $[0 ; +\infty[$, $f'(t) = 1370 \times (-0{,}065)\,\mathrm{e}^{-0{,}065t} + 0 = -89{,}05\,\mathrm{e}^{-0{,}065} < 0$.

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

b. La fonction f représente la température de la pièce après sa sortie du four ; la pièce refroidit en sortant du four donc la température diminue et donc la fonction f est décroissante.

3. On cherche la température de la pièce après avoir été entreposée 5 heures dans le local :
$f(5) = 1\,370\,\mathrm{e}^{-0{,}065\times 5} + 30 \approx 1\,020 > 650$
donc la pièce ne peut pas être démoulée après 5 heures.

4. **a.** La pièce pourra être démoulée après un temps t tel que $f(t) < 650$; on résout cette inéquation :
$f(t) < 650 \iff 1\,370\,\mathrm{e}^{-0{,}065\times t} + 30 < 650 \iff 1\,370\,\mathrm{e}^{-0{,}065\times t} < 620 \iff$
$\mathrm{e}^{-0{,}065\times t} < \dfrac{620}{1370} \iff -0{,}065t < \ln\left(\dfrac{620}{1370}\right) \iff t > \dfrac{\ln\left(\dfrac{620}{1370}\right)}{-0{,}065}$.
Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{620}{1370}\right)}{-0{,}065} \approx 12{,}20$ donc on pourra démouler la pièce au bout de 12,20 h soit 12 heures et 12 minutes.

b. Pour éviter la fragilisation de la fonte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint 325 °C.
On résout l'inéquation $f(t) < 325$:
$f(t) < 325 \iff 1\,370\,\mathrm{e}^{-0{,}065\times t} + 30 < 325 \iff 1\,370\,\mathrm{e}^{-0{,}065\times t} < 295 \iff$
$\mathrm{e}^{-0{,}065\times t} < \dfrac{295}{1370} \iff -0{,}065t < \ln\left(\dfrac{295}{1370}\right) \iff t > \dfrac{\ln\left(\dfrac{295}{1370}\right)}{-0{,}065}$.
Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{295}{1370}\right)}{-0{,}065} \approx 23{,}63$ qui n'est pas le double de 12,20 ; il ne faudra donc pas attendre exactement deux fois plus de temps que précédemment.

Exercice 3 4 points

Un chef cuisinier décide d'ajouter un « menu terroir » à la carte de son restaurent. S'appuyant sur sa longue expérience, le restaurateur pense qu'environ 30 % des clients choisiront ce menu. Ceci le conduit à faire l'hypothèse que la probabilité qu'un client pris au hasard commande le « menu terroir » est de $p = 0{,}3$.

Partie A

Afin de tester la validité de son hypothèse, le restaurateur choisit au hasard 100 clients et observe que 26 d'entre eux ont commandé un « menu terroir ».
Après discussion avec son comptable, le restaurateur décide d'accepter l'hypothèse que $p = 0{,}3$.
$n = 100 \geqslant 30$, $np = 100 \times 0{,}3 = 30 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 70 \geqslant 5$; les conditions sont réalisées donc on peut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % :
$\left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}3 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}3\times 0{,}7}}{\sqrt{100}}\ ;\ 0{,}3 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}3\times 0{,}7}}{\sqrt{100}}\right]$
$\approx [0{,}21\ ;\ 0{,}39]$.
Dans l'échantillon de 100 clients, il y en a 26 qui ont choisi le « menu terroir », ce qui fait une fréquence de 0,26 ; or $0{,}26 \in [0{,}21\ ;\ 0{,}39]$ donc le restaurateur a raison d'accepter l'hypothèse que $p = 0{,}3$.

Partie B

Une agence de voyage a réservé toutes les tables du restaurant pour la semaine à venir. Le restaurateur sait ainsi que 1 000 clients viendront déjeuner chacun une fois durant la semaine.
Le nombre de « menu terroir » qui seront alors commandés est une variable aléatoire X.
On considère que la probabilité qu'un des clients commande un « menu terroir » est $p = 0{,}3$.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   a. Les paramètres de la loi binomiale sont $n = 1\,000$ et $p = 0{,}3$.
   b. La probabilité que le nombre de « menus terroir » commandés soit inférieur ou égal à 315 est $P(X \leqslant 315) \approx 0{,}857$ (à la calculatrice).
2. On décide d'approcher la loi binomiale précédente par la loi normale d'espérance $\mu = 300$ et d'écart-type $\sigma = 14{,}49$.
   D'après le cours, $\mu = np = 300$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 14{,}49$.

Dans la suite de l'exercice, on utilisera cette approximation par la loi normale.

3. **a.** On obtient à la calculatrice $P(285 \leqslant X \leqslant 315) \approx 0{,}70$.
   b. On obtient à la calculatrice $P(X \geqslant 350) \approx 0$, donc il n'y a aucune chance qu'il y ait 350 clients ou plus qui commandent le « menu terroir ».

Exercice 4 — 5 points

1. **Proposition 1** – Le nombre complexe z de module $4\sqrt{3}$ et dont un argument est $\dfrac{2\pi}{3}$ a pour forme algébrique $-2\sqrt{3}+6\text{i}$.

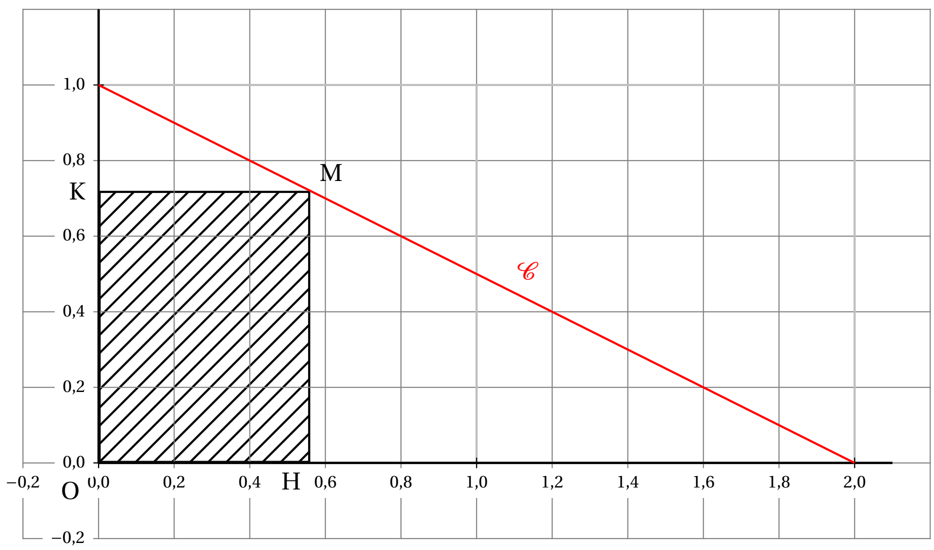
   $z = 4\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}+6\text{i}$

   Proposition 1 vraie

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. Les points A, B et C ont pour affixes respectives : $z_{\text{A}} = 2\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$, $z_{\text{B}} = -1+\text{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{C}} = z_{\text{A}} \times z_{\text{B}}$.
   Proposition 2 – Le point C appartient au cercle de centre O et de rayon 4.

   On calcule la distance OC qui est le module du nombre complexe z_{C} : $|z_{\text{C}}| = |z_{\text{A}} \times z_{\text{B}}| = |z_{\text{A}}| \times |z_{\text{B}}|$
   $z_{\text{A}} = 2\,\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$ donc $|z_{\text{A}}| = 2$; $z_{\text{B}} = -1+\text{i}\sqrt{3}$ donc $|z_{\text{B}}| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
   Donc $|z_{\text{C}}| = 2 \times 2 = 4$ et donc le point C appartient au cercle de centre O et de rayon 4.
   Proposition 2 vraie

3. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0\,;\,2]$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x+1$.



On considère le point M de coordonnées $\left(x\,;-\dfrac{1}{2}x+1\right)$ sur la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que les points H $(x\,;0)$ et K $\left(0\,;\,-\dfrac{1}{2}x+1\right)$.

Proposition 3 – L'aire, en unités d'aire, du rectangle OHMK est maximale lorsque M a pour abscisse 1.

L'aire du rectangle OHMK est OH × OK $= x \times \left(-\dfrac{1}{2}x+1\right) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x$ de la forme ax^2+bx+c (trinôme du second degré).

$a = -\dfrac{1}{2} < 0$ donc cette aire est maximale pour $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$.

L'aire est donc maximale pour $x = 1$ autrement dit lorsque M a pour abscisse 1.

Proposition 3 vraie

4. On veut modéliser le temps d'attente d'un client, en minutes, à la caisse d'un supermarché par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Des études statistiques montrent que la probabilité qu'un client attende plus de 7 minutes à cette caisse est de 0,417.

On rappelle que, pour tout réel t positif, $P(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Proposition 4 – Le temps d'attente moyen à cette caisse de supermarché est 9 minutes.

Le temps d'attente moyen est l'espérance mathématique $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

On détermine λ en utilisant les données du texte : la probabilité qu'un client attende plus de 7 minutes à cette caisse est de 0,417 ce qui équivaut à $P(X > 7) = 0{,}417$.

$P(T>7) = 0{,}417 \iff \mathrm{e}^{-7\lambda} = 0{,}417 \iff -7\lambda = \ln(0{,}417) \iff \lambda = \dfrac{\ln(0{,}417)}{-7}$ donc $\lambda \approx 0{,}125$

$\dfrac{1}{0{,}125} = 8$ donc le temps d'attente moyen est de 8 minutes.

Proposition 4 fausse