∽ Corrigé du concours de contrôleur des douanes : surveillance ∾ avril 2019

OPTION A : MATHÉMATIQUES

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.

Exercice n° 1

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

1. Différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, g l'est aussi et sur cet intervalle :
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   - $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > \ln 1$ (croissance de la fonction ln) $\iff x = 0$; la fonction g est donc croissante sur $[0~;~+\infty[$.
   - Enfin $\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff x = 0$ et $g(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 0$.
   - Limite en plus l'infini : on a pour tout $x \in [0~;~+\infty[$, $g(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ on obtient par produit de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	0 ↗	$+\infty$

2. g est croissante à partir de $g(0) = 0$, donc $g(x) \geqslant 0$ sur $[0~;~+\infty[$.
3. D'après le résultat précédent quel que soit $x \in [0~;~+\infty[$, $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 1 > 0$, donc $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[0~;~1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On admet que f est strictement croissante sur $[0~;~1]$.

1. On a vu dans la partie A que $e^x - x > 0$ et on a aussi $e^x - 1 \geqslant 0$ puisque sur $[0\,;\,+\infty[$, $e^x \geqslant e^0 = 1$.

Donc $\dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \geqslant 0$ (quotient de deux termes positifs).

D'autre part : $\dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = \dfrac{e^x - x + x - 1}{e^x - x} = \dfrac{e^x - x}{e^x - x} + \dfrac{x-1}{e^x - x} = 1 - \dfrac{1-x}{e^x - x}$.

Or si $x \leqslant 1$, $1 - x \geqslant 0$ et par conséquent $\dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \leqslant 1$.

Conclusion : si $x \in [0\,;\,1]$, alors $f(x) \in [0\,;\,1]$.

2. a. Pour tout x de $[0;1]$, $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \dfrac{e^x - 1 - x(e^x - x)}{e^x - x} = \dfrac{e^x - xe^x - 1 + x^2}{e^x - x} = \dfrac{e^x(1-x) - \left(1 - x^2\right)}{e^x - x} = \dfrac{e^x(1-x) - (1+x)(1-x)}{e^x - x} = \dfrac{(1-x)(e^x - 1 - x)}{e^x - x} = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

b. Sur l'intervalle $[0;1]$, on a $1 - x \geqslant 0$ et $e^x - x > 0$, donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $g(x)$ vu à la question 1. de la partie A où l'on a vu que $g(x) \geqslant 0$, g ne s'annulant qu'en 0.

Ceci signifie que la représentation graphique de f, $\mathscr{C}$ est au dessus de la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto x$, la droite (D), $\mathscr{C}$ et (D) n'ayant qu'un point commun en $x = 0$ pour laquelle $y = 0$ (l'origine).

3. a. Soit la fonction u définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = e^x - x$.

Cette fonction somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : $u'(x) = e^x - 1$.

On a donc $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui est la dérivée de la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $x \longmapsto \ln|u(x)| = \ln u(x)$ puisque $e^x - x >$ (question 3. partie A).

Une primitive de f sur $[0;1]$ est donc définie par $\ln(e^x - x)$.

b. La fonction f étant positive sur l'intervalle $[;1]$, l'aire cherchée est égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\ln\left(e^x - x\right)\right]_0^1 = \ln(e - 1) - \ln\left(e^0 - 0\right) = \ln(e = 1)$.

Exercice n° 2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcc} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2u_n}{2+3u_n} \end{array}\right.$$

1. a.

- $u_1 = \dfrac{2u_0}{2+3u_0} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.
- $u_2 = \dfrac{2u_1}{2+3u_1} = \dfrac{1}{\frac{7}{2}} = \dfrac{2}{7}$.

b.
- : on a $u_1 - u_0 = \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2}$;
- : on a $u_2 - u_1 = \dfrac{2}{7} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{14}$ donc la suite n'est pas arithmétique.
- : on a $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$;

- : on a $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{7}$ donc la suite n'est pas géométrique.

2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas nul et on pose $v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{u_n}{2+3u_n}} = 1 + \dfrac{2+3u_n}{u_n} = 1 + \dfrac{2}{u_n} + \dfrac{3u_n}{u_n} = v_n + 3$.

L'égalité $v_{n+1} = v_n + 3$, vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 3 de premier terme $v_0 = 1 + \dfrac{2}{u_0} = 1 + \dfrac{2}{2} = 2$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on sait qu'alors $v_n = 2 + 3n$.

Or $v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n} \iff v_n - 1 = \dfrac{2}{u_n} \iff 1 + 3n = \dfrac{2}{u_n} \iff \dfrac{u_n}{2} = \dfrac{1}{1+3n} \iff$

$$u_n = \frac{2}{1+3n}.$$

c. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+3n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice n° 3

$$\text{A}(-1\,;\,2\,;\,1),\quad \text{B}(1\,;\,6\,;\,-1),\quad \text{C}(2;2;2),\quad \text{I}(0\,;\,1\,;\,-1)$$

1. $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les deux vecteurs définissent un plan P dont les points M sont tels que

$$\overrightarrow{\text{A}M} = \alpha\overrightarrow{\text{AB}} + \beta\overrightarrow{\text{AC}}.$$

2. On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} 2 - 8 + 6 = 0$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} 3 + 0 - 3 = 0$: le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P, il est normal à ce plan. On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z) \in P \iff 1x - 2y - 3z + d = 0 \iff x - 2y - 3z + d = 0,\quad d \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\text{A}(-1\,;\,2\,;\,1) \in P \iff -1 - 4 - 3 + d = 0 \iff d = 8$, donc

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in P \iff x - 2y - 3z + 8 = 0.$$

Exercice n° 4

On considère une roue partagée en 15 secteurs angulaires numérotés de 1 à 15.

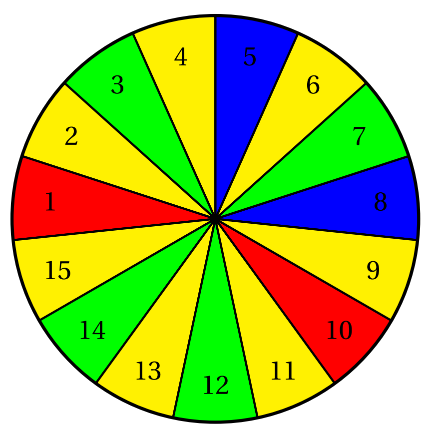
Ces secteurs sont de différentes couleurs :

- secteurs 1 et 10 rouges ;
- secteurs 2, 4, 6, 9, 11, 13 et 15 jaunes ;
- secteurs 5 et 8 bleus ;
- secteurs 3, 7, 12 et 14 verts).

On fait tourner la roue qui s'arrête sur l'un des 15 secteurs dont on note le numéro.

L'ensemble des éventualités est :

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13, 14, 15\}$.



1. Déterminer la probabilité des évènements suivants :

a. $p(E) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$;

b. $p(F) = p\left(\overline{E}\right) = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$

c. $p(G) = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$;

d. • $p(E \cap G) = \dfrac{1}{15}$.

• $p(E \cup G) = \dfrac{7}{15}$;

2. **a.**

X	0	10	30	100
$p(X=)$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{2}{15}$

b. On a $E(X) = 0 \times \dfrac{7}{15} + 10 \times \dfrac{4}{15} + 30 \times \dfrac{2}{15} + 100 \times \dfrac{2}{15} = \dfrac{0 + 40 + 60 + 200}{15} = \dfrac{300}{15} = 20$.

Pour un grand nombre de parties le gain moyen est de 20 € par partie.

3. Deux observateurs A et B sont un peu éloignés de la roue. Ils voient la couleur du secteur sur lequel la roue s'arrête mais ne peuvent pas distinguer les numéros.

B connaît la correspondance entre les numéros et les couleurs des différents secteurs et indique à A sur quel numéro il doit parier.

Évaluer dans chacun des cas suivants la probabilité pour A de gagner :

a. La probabilité est nulle.

b. La roue s'arrête sur un secteur vert et A parie que le numéro est 3. La probabilité est égale à $\dfrac{1}{4}$.

c. La roue s'arrête sur un secteur bleu et A parie que le numéro est 8. La probabilité est égale à $\dfrac{1}{2}$.

d. La roue s'arrête sur un secteur jaune et A parie que le numéro n'est pas 14. La probabilité est égale à 1 puisqu'il parie un non vert et que c'est un jzune qui est sorti.