

Test des cosmonautes, logique et réciproque

Valérie Larose

Heureusement qu'il y a les vacances pour lire des articles recommandés par les amis et mis de côté en attendant... de trouver le temps. C'est ainsi que j'ai découvert, il y a deux ans, un article de Gérard Gouttebroze intitulé « *le test des cosmonautes* », publié en 1983 dans le numéro 1 de la revue *Petit x...* et toujours d'actualité ! Comme quoi, faire des maths, c'est ne pas vieillir...

Test des cosmonautes

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

Question 1 : A l'aéroport, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?

Question 2 : A côté de lui, il y a quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ?

Question 3 : Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?

Question 4 : Dans le hall, on voit un cosmonaute américain en manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?

Pour chacune des questions, trois réponses étaient proposées : oui ; non ; on ne peut pas savoir.

L'article détaillait le déroulement de l'activité proposée à 113 élèves de quatrième, les pourcentages de réussite des élèves avant et après discussion entre eux et des tentatives de prolongement.

La guerre des étoiles entre russes et américains étant terminée, j'ai choisi de réécrire ce test sur un sujet plus terre à terre... en lien avec le vécu de mes élèves. Les trois réponses proposées

étaient oui ; non ; on ne peut pas savoir. Pour votre culture personnelle, Nozay, La Ville du Bois et Villejust sont trois villages de l'Essonne.

Dans la classe X, tous les garçons qui font de l'anglais habitent à Nozay. Les prénoms du questionnaire sont ceux d'élèves de la classe X.

① François habite la Ville du bois.

Fait-il de l'anglais ?

② Stéphanie fait de l'anglais.

Habite-t-elle à Nozay ?

③ Dominique fait de l'anglais et habite Villejust. Est-ce une fille ?

④ Antoine habite à Nozay. Fait-il de l'anglais ?

⑤ Invente à ton tour une question pour cet exercice. Donne la bonne réponse en la justifiant.

Contrairement aux modalités proposées par *Petit x*, j'ai proposé ce questionnaire en devoir à la maison avec obligation de justifier ses réponses. Deux classes étaient concernées : une 6^{ème} et une 4^{ème} en début d'année scolaire. La majorité des élèves ne voyant pas le lien avec le chapitre traité en classe a demandé si c'était sérieux, si c'était noté... et il me semble avoir lu sur le visage de certains élèves de 4^{ème} quelque chose comme : « la nouvelle prof, elle tourne pas rond ».

Au cours de la semaine de recherche (les élèves ont une semaine pour chercher les DM avec la possibilité de me présenter leurs brouillons, de me questionner), il ne s'est pas passé un cours sans qu'un élève ne pose une question au sujet du devoir et sans que cela ne suscite une réaction des autres. Certains, sûrs de leur réponse, étaient déroutés que d'autres ne pensent pas la même chose. Il était clair que la phrase « tous les garçons qui font

de l'anglais habitent à Nozay » se traduisait par « tous ceux qui habitent Nozay font de l'anglais » selon les élèves. Le débat était lancé !

La correction des copies m'a apporté son lot de surprises : peu d'écart de



réussite entre les deux classes, tant sur les réponses que les justifications écrites. La question n°3 aura causé bien des soucis de rédaction et d'incompréhension pour beaucoup. Avant de rendre les copies, j'ai projeté l'énoncé au rétroprojecteur et j'ai demandé aux élèves tout d'abord d'y répondre individuellement sur leur cahier d'exercices puis, par groupe de quatre, de proposer une réponse par groupe. Chaque groupe était constitué d'élèves pas tous d'accord sur les réponses, ils ont donc été amenés à argumenter... Nous avons fait une mise en commun des réponses avec argumentation orale des réponses proposées. La réponse « on ne peut pas savoir » a beaucoup perturbé, surtout les 6^{ème} pour qui on doit forcément savoir.

Du fait que l'énoncé était proche de leur réalité d'élève, le contre-exemple est venu naturellement : les élèves germanistes de la classe habitant Nozay permettaient d'infirmer la réponse « oui » à la question n°4. J'ai alors défini le mot « contre-exemple » qui n'était pas familier et j'ai particulièrement insisté sur le fait

qu'avec un seul contre-exemple, on pourra montrer qu'une phrase est fausse quand des dizaines d'exemples qui « marchent » ne prouvent pas qu'une phrase est vraie.

Des élèves de 4^{ème} ont reformulé « tous les garçons qui font de l'anglais habitent à Nozay » en « si j'habite Nozay, alors je fais de l'anglais » et je me suis dit qu'on en reparlerait au moment de la notion de réciproque. A la dernière question, j'ai eu toutes sortes de propositions dont beaucoup du même type que la n°3 (prénom à la fois masculin et féminin) avec une explication satisfaisante pour la réponse. Certains ont essayé de piéger les autres, mais la négation de « tous » en « il existe au moins » ne fut pas simple à faire passer.

Je pense que tous les élèves ont cherché ce devoir avec sérieux, même les élèves en rupture scolaire qui, ne voyant pas le rapport avec les maths, n'ont pas renoncé avant de commencer. Lors de la mise en commun des réponses, ils ont participé au débat collectif.

Tout comme le proposait Gérard Gouttebroze, j'ai proposé peu de temps après à mes 4^{ème} un questionnaire sur la nature des quadrilatères, histoire de réviser les connaissances de 5^{ème}. Les réponses proposées étaient encore oui ; non ; on ne peut pas savoir.

Question n°1 : Un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, est-ce un carré ?

Question n°2 : Tous les rectangles sont-ils des carrés ?

Question n°3 : Un carré est-il un rectangle ?

Question n°4 : Un quadrilatère non carré a-t-il ses diagonales perpendiculaires ?

L'utilisation d'un contre-exemple n'a pas eu de mal à ressurgir et il me semble que les élèves étaient méfiants, la réponse « on ne peut pas savoir » ayant laissé des traces. Mais, cette fois, les mathématiques étaient clairement visibles et les élèves en difficulté se sont plus difficilement mis au travail. De plus, le statut du verbe « être » dans les

énoncés de mathématiques aurait mérité quelques explications de ma part ; la question n°3 est un vrai piège pour les élèves si ce que signifie le verbe « être » du point de vue mathématique n'est pas clairement défini.

Des élèves se sont spontanément mis à schématiser alors que d'autres essayaient de rafraîchir leur mémoire pour retrouver définitions et propriétés vues l'an passé. Beaucoup ont vu un lien entre ce questionnaire et le DM et j'ai cru lire : « elle a de la suite dans les idées, la prof ».

Avant d'aborder la réciproque du théorème de Pythagore, j'ai travaillé sur la notion de réciproque. Il me semble que ce mot doit être explicité et qu'il n'est pas naturel pour un élève d'écrire la réciproque d'une phrase. Le DM avait clairement souligné la facilité des élèves pour transformer une phrase en sa réciproque et les penser équivalentes. J'ai fait écrire dans le cahier de leçons :

Notion de réciproque

A partir d'une phrase du type « si ... alors ... » on peut fabriquer une phrase en inversant les données (hypothèses) et les conclusions. La phrase obtenue est dite réciproque de la première.

J'ai fourni deux exemples ; il m'a semblé important que l'un des exemples ne soit pas basé sur les maths pour que les élèves ne soient pas gênés par la compréhension du texte.

Phrase

SI je suis majeur, ALORS je peux voter.

Phrase réciproque

SI je peux voter, ALORS je suis majeur.

Phrase

SI on est le 3 octobre, ALORS on est en automne.

Phrase réciproque

SI on est en automne, ALORS on est le trois octobre.

Phrase

SI un triangle est équilatéral, ALORS il a 3 angles de même mesure.

Phrase réciproque

SI un triangle a 3 angles de même mesure, ALORS il est équilatéral.

Les élèves ont alors réagi vivement : « la phrase réciproque du deuxième exemple

n'est pas vraie, on ne peut pas l'écrire ». Du coup nous avons défini ce que signifie vrai et faux en cours de maths (la difficulté de trouver des phrases toujours vraies est vite apparue) ; le fait qu'une phrase quantifiée soit fausse dès qu'elle n'est pas toujours vraie a causé bien des remous ; j'ai tenté de leur faire chercher des phrases mathématiques mais en vain. J'ai finalement fait noter :

Attention, une phrase vraie n'a pas toujours une réciproque vraie.

Les élèves ont alors eu à chercher pour le lendemain une phrase et sa réciproque. Je ne pensais pas leur causer tant de soucis... En effet, des phrases (à caractère non mathématique) leur sont venues naturellement mais leurs réciproques étant des phrases fausses, ils ne pensaient pas toujours avoir le droit de les écrire... souci qu'ils n'ont pas avec des exemples mathématiques !

Lors de la mise en commun des phrases trouvées, un exemple permettra à certains de raccrocher :

Phrase (vraie)

SI je suis un garçon, ALORS je porte un pantalon.

Phrase réciproque (fausse)

SI je porte un pantalon, ALORS je suis un garçon.

L'allusion par quelques élèves aux écossais qui sont en kilt est assez vite balayée par l'ensemble de la classe. J'ai terminé avec un exemple mathématique et montré, une fois de plus, la force du contre-exemple à l'aide d'un schéma pour prouver qu'une affirmation est fausse :

Phrase (vraie)

SI je suis un carré, ALORS mes diagonales sont perpendiculaires.

Phrase réciproque (fausse)

SI mes diagonales sont perpendiculaires, ALORS je suis un carré.

Rien n'est précisé de façon explicite dans nos programmes quant à la logique dite formelle mais il me semble indispensable d'y consacrer un peu de temps. Et si je n'ai pas fini le programme, alors je saurai pourquoi !