

☞ Baccalauréat C Côte d'Ivoire juin 1979 ☞

EXERCICE 1

4 points

Une urne contient 2 boules blanches, 4 boules rouges et 2 boules vertes, toutes indiscernables au toucher.

Un joueur tire une boule de l'urne au hasard;

- Si elle est blanche, il reçoit x francs ($x \in \mathbb{N}^*$) et le jeu s'arrête.
- Si elle est rouge, il donne y francs ($y \in \mathbb{N}^*$) et le jeu s'arrête.
- Si elle est verte, il tire une autre boule au hasard, sans remettre la première; si cette dernière boule tirée est blanche, il reçoit x francs et le jeu s'arrête; si non il donne x francs et le jeu s'arrête.

On désigne par X le gain en francs (positif ou négatif suivant qu'il a reçu ou donné de l'argent).

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ainsi définie?
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de x et de y .
3. Pour participer au jeu précédent, le joueur a dû verser 5 francs.
4. Trouver les couples $(x; y)$ d'entiers naturels tous deux inférieurs à 100 tels que l'espérance de gain du joueur soit égale à sa mise.

EXERCICE 2

4 points

On appelle \mathbf{Q} l'ensemble des entiers naturels de la forme $q = 2^a \cdot p$ où p désigne un nombre premier arbitraire autre que 2 et a un naturel quelconque.

1. Calculer en fonction de p et de a le nombre n et la somme s des diviseurs d'un nombre q .
2. Montrer que si l'égalité $s = 2q$ est vérifiée, le nombre $2a + 1 - 1$ est premier.
3. Montrer que si $a + 1$ n'est pas premier, il en est de même pour $2^{a+1} - 1$. (On montrera que si b et c sont des entiers strictement supérieurs à 1, alors $2^{bc} - 1$ est divisible par $2^b - 1$).
4. Trouver tous les éléments de \mathbf{Q} pour lesquels $a < 10$ et $s = 2q$.

PROBLÈME

12 points

N.B. - La partie C peut être abordée sans que la partie B ait été traitée

Dans tout le problème, P désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Pour tout réel k strictement positif, on considère l'application T_k de P dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y + \text{Log } k \end{cases} \quad \text{où Log désigne le logarithme népérien.}$$

1. Montrer que T_k est une application affine bijective.
2. Soit G l'ensemble des applications T_k où k décrit \mathbb{R} . La loi de composition des applications étant notée \circ , montrer que (G, \circ) est isomorphe à (\mathbb{R}, \times) et que (G, \circ) est un groupe. Préciser si ce groupe est commutatif ou non, indiquer son élément neutre et le symétrique de l'élément T_k .

Partie B

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction numérique f_k de la variable réelle x telle que, pour tout x réel :

$$f_k(x) = \frac{e^x - k^2 e^{-x}}{2}$$

où e désigne la base du logarithme népérien.

1. Étudier la variation de f_k .
2. Montrer que f_k admet une application réciproque que l'on notera g_k . Calculer $g_k(x)$ pour tout réel x de l'ensemble de définition de g_k .
3. On appelle \mathcal{C}_k et Γ_k les courbes représentatives de f_k et g_k dans \mathcal{R} .
 - a. Construire \mathcal{C}_1 et Γ_1 .
 - b. Montrer que le point O est centre de symétrie pour chacune des courbes \mathcal{C}_1 et Γ_1 .
 - c. Calculer, en fonction du réel a positif, l'aire du domaine plan D défini par :

$$M(x; y) \in D \iff \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq g_1(x). \end{cases}$$

4. Montrer que l'image de Γ_1 par l'application T_k définie au 1. est la courbe Γ_k .
5. En utilisant les résultats 3. b. et 4., montrer que Γ_k admet un centre de symétrie. Quel est l'ensemble de ces centres de symétrie quand k décrit \mathbb{R} ?
6. Montrer que deux courbes quelconques Γ_{k_1} et Γ_{k_2} se déduisent l'une de l'autre par une application de l'ensemble G que l'on précisera.

Partie C

Pour tout réel t élément de $[0; 2\pi]$, on considère le point M de P de coordonnées $(x; y)$ dans \mathcal{R} telles que :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

1. Quelle est la nature du mouvement de M quand t varie?
2. k étant un réel strictement positif arbitrairement choisi, soit m le point de P tel que $m = T_k(M)$.
 - a. Donner une équation cartésienne de la trajectoire de m quand t varie. Préciser la nature de cette courbe, ses éléments de symétrie et les points remarquables qui s'y trouvent.
 - b. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point m à la date t .
Le mouvement est-il accéléré ou retardé?
3. On suppose que $k = 2$. Construire, sur un même croquis, les trajectoires de M et m . Placer les positions M_0 et m_0 de ces points à la date $t = 0$, ainsi que les représentants, d'origines respectives M_0 et m_0 , des vecteurs vitesse et accélération de chacun de ces mobiles à la date $t = 0$.
On donne $\text{Log } 2 \approx 0,7$.