Baccalauréat C Côte d'Ivoire juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$x^2 + y^2 = 25.$$

2. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe d'équation

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0.$$

Trouver tous les points de $(\mathscr{C})$ dont les coordonnées sont des éléments de $\mathbb{Z}$ et placer ces points dans un repère orthonormé,

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que

$$z_1 = \mathrm{i}\overline{z} + a + \mathrm{i}b,$$

où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de z, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$, a et b deux réels quelconques donnés.
On appelle A le point de coordonnées a et b.

1. Montrer que f est un antidéplacement de $\mathscr{P}$.
2. Comment faut-il choisir le point A pour que f soit une symétrie orthogonale. Préciser quelle est cette symétrie.
3. On choisit A de telle sorte que f ne soit pas une symétrie orthogonale,
   a. Quelle est la nature de f ? Préciser les éléments qui définissent f.
   b. On pose $f^1 = f$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $f^n = f^{n-1} \circ f$.
   Montrer que, pour tout entier naturel p non nul, f^{2p} est une translation dont on donnera le vecteur. Quelle est la nature de f^{2p+1} ?

PROBLÈME **13 POINTS**

N. B. Le problème se compose de quatre parties
La solution de la partie C ne fait appel à aucun des résultats établis dans les parties A et B.
La partie D peut être traitée en admettant les résultats de la partie C.
Dans tout ce problème, on désignera par S l'ensemble $]-1~;~+\infty[$.

Partie A

On définit sur S une loi Δ de la façon suivante :

$$\forall x \in S, \quad \forall y \in S x \Delta y = x + y + xy.$$

Démontrer que la loi Δ est une loi de composition interne dans S et qu'elle confère à cet ensemble une structure de groupe commutatif.

Partie B

Soit h_1 l'application définie par

$$\forall x \in S, \quad h_1(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}} - 1$$

1. a. Montrer que h_1 prend ses valeurs dans S.

b. Établir que

$$\forall x \in S, \quad \forall y \in S, \quad h_1(x)\Delta h_1(y) = h_1(x\Delta y).$$

2. a. Étudier les variations de h_1 et en déduire que h_1 est une bijection de S sur S.

b. Calculer $h_1'(0)$.

c. Construire la courbe (Γ) représentative de h_1 dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.

3. Soit l'application t de S vers $\mathbb{R}_+^\star$ définie par :

$$\forall x \in S, \quad t(x) = x+1.$$

a. Montrer que t est un isomorphisme du groupe $(S,\ \Delta)$ sur le groupe $\left(\mathbb{R}_+^\star,\ \cdot\right)$.

b. Soit f_1 l'application définie par :

$$f_1 = t \circ h_1 \circ t^{-1}.$$

Déduire de ce qui précède que f_1 est un isomorphisme du groupe dans lui-même.

c. Calculer $f_1(x)$, puis $f_1'(1)$.

d. Construire la courbe représentative (C) de f_1 dans le même repère que précédemment et vérifier que (C) se déduit de (Γ) par une translation que l'on précisera.

Partie C

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$\boxed{\text{P}}$ f est dérivable au point 1 .

$\boxed{\text{Q}}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^\star, \quad f(xy) = f(x)f(y).$

1. Vérifier que l'application f_1 définie au B est un élément de $\mathscr{F}$.

Soit f un élément quelconque de $\mathscr{F}$.

a. Etablir que $f(1) = 1$.

b. Soit x_0 un réel strictement positif et k un réel tel que $x_0 + k \in \mathbb{R}_+^\star$.

Montrer que $f\left(x_0+k\right) - f\left(x_0\right) = f\left(x_0\right)\left[f\left(1+\dfrac{k}{x-0}\right) - f(1)\right]$.

c. Déduire de ce qui précède que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^\star$ et que l'on a :

$$\boxed{\text{R}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{x}$$

où f' désigne la fonction dérivée de f.

d. Que se passe-t-il pour f si l'on choisit $f'(1)$ nul ?

Montrer que f est strictement monotone si l'on choisit $f'(1) \neq 0$.

e. En considérant une primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1)}{x}$$

montrer que, α désignant un réel, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad f(x) = x^\alpha.$$

2. Montrer que $\mathscr{F}$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ du type $x \longmapsto x^\alpha$ où α décrit $\mathbb{R}$.

Partie D

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des applications h de S dans S vérifiant les deux conditions suivantes :

$\boxed{\text{P}'}$ h est dérivable au point zéro.

$\boxed{\text{Q}'}$ $\forall x \in S,\ \forall y \in S,\ h(x\Delta y) = h(x)\Delta h(y)$

1. Vérifier que l'application h, définie au B est un élément de $\mathscr{H}$.

2. t étant l'application définie au B, montrer que, si $h \in \mathscr{H}$, alors $t \circ h \circ t^{-1} \in \mathscr{H}$.

3. Montrer que $\mathscr{H}$ est l'ensemble des applications de S dans S du type $x \longmapsto (x+1)^\alpha - 1$ où α décrit $\mathbb{R}$.

4. Pour tout réel α et tout élément q de S, on note $a^{[\alpha]}$ l'élément $(a+1)^\alpha - 1$ de S.
Établir que :

a. $\forall x \in S \quad \forall y \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad x^{[\alpha]}\Delta y^{[\alpha]} \quad = \quad (x\Delta y)^{[\alpha]}$.

b. $\forall x \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad x^{[\alpha]}\Delta\, y^{[\beta]} \quad = \quad (x)^{[\alpha+\beta]}$.

c. $\forall x \in S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \left(x^{[\alpha]}\right)^{[\beta]} \quad = \quad (x)^{[\alpha\beta]}$.