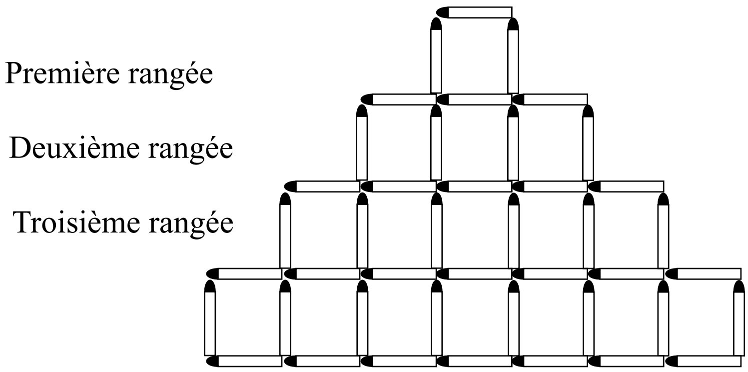
CRÉTEIL

Exercice n^o 2

Enoncé

Les allumettes

Des allumettes En disposant des allumettes de longueur identique sur une surface plane, on réalise petit à petit la figure suivante constituée de carrés :



Quelle rangée est-on en train de construire lorsque l'on pose la 100$^{\text{ème}}$ allumette ? Lorsque l'on pose la 2006$^{\text{ème}}$ allumette ?

Solution

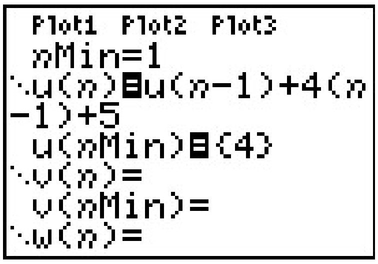
Approche calculatrice par A. Guillemot

Toutes les rangées sont formées d'un nombre impair de carrés, ainsi la rangée n contient $2n-1$ carrés.
On appelle S_n le nombre d'allumettes nécessaire pour réaliser n rangées.
Pour réaliser la rangée suivante qui contiendra $2n+1$ carrés, il faut :
8 allumettes pour faire les carrés des extrémités.
$2n-1$ allumettes pour réaliser les côtés "horizontaux".
$2n-2$ allumettes pour réaliser les côtés "verticaux".

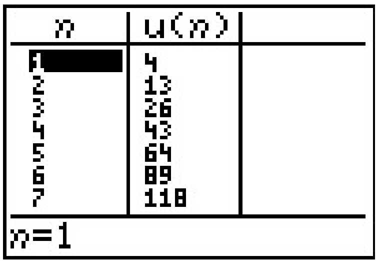
On peut donc dire que $S_{n+1} = S_n + 8 + 2n - 1 + 2n - 2$.
D'où $S_{n+1} = S_n + 4n + 5$ou bien $S_n = S_{n-1} + 4(n-1) + 5$

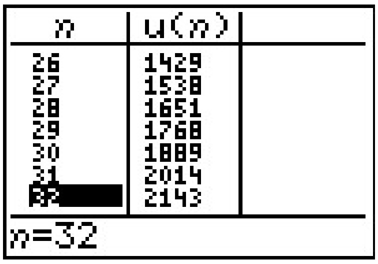
Il suffit de construire la table de valeurs de la suite (S_n) pour répondre au problème.

Utilisation du mode "seq" de sa calculatrice.
On entre la suite (S_n) sous la forme $S_n = S_{n-1} + 4(n-1) + 5$
dans l'écran $Y =$



On demande la table de valeurs par la commande TABLE et on la fait défiler pour obtenir la réponse à nos questions.



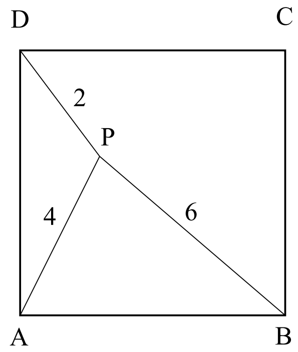


Conclusion.
La $100^{ème}$ allumette sera utilisée dans la construction de la $7^{ème}$ rangée et la $2006^{ème}$ allumette dans la construction de la $31^{ème}$ rangée.

Exercice n° 3

Enoncé

Le parchemin



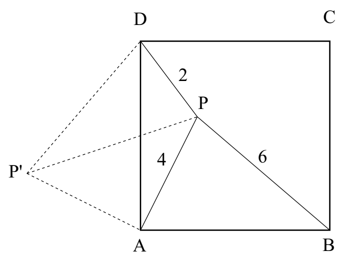
Sur ce parchemin ne figurent qu'un carré, trois segments et trois indications de longueur. Déterminer l'angle $\widehat{APD}$.
On pourra construire l'image de cette figure par la rotation de centre A d'angle 90° qui transforme le point B en point D.

Solution 1

Solution proposée par Dominique Roux
Inspecteur Général Honoraire de mathématiques

Elle suit le conseil de l'énoncé, à cela près qu'il n'est pas utile de considérer toute la figure.

Soit la rotation $\mathscr{R}(A, B \to D)$, et P' l'image de P.
D'une part, $AP' = AP$, et $\widehat{PAP'} = 90^\circ$. D'où $PP' = 2\sqrt{2}$ (et $\widehat{APP'} = 45^\circ$).
D'autre part, $P'D = PB$.
$= 6$.



La construction du triangle $P'PD$ le fait conjecturer rectangle en P. Etudions cela :
$P'D^2 = 36$ et $PD^2 + PP'^2 = 4 + 32 = 36$.
Donc $P'D^2 = PD^2 + PP'^2$ et le triangle $P'PD$ est rectangle en P.

Dès lors
$$\begin{aligned}\widehat{APD} &= \widehat{APD'} + \widehat{P'PD}\\ &= 45^{\circ} + 90^{\circ}\\ &= 135^{\circ}.\end{aligned}$$

Remarques, par Henri BAREIL
Le conseil de l'énoncé provient sans doute de la volonté d'associer à PA, PB, PD un triangle dont les côtés s'expriment simplement en fonction de ces trois longueurs, donc constructible.
La rotation $\mathscr{R}$ en conserve deux et établit facilement une mesure de côté liée à la troisième longueur).

Qu'advient-il si les mesures de *PA, PB, PD* ne sont plus 2 ; 4 ; 6 (ou des nombres proportionnels tels 1 ; 2 ; 3, plus simples !) ou si le triangle ABD cesse d'être rectangle ou isocèle ?

Le Bulletin vert de l'APMEP proposera un article là-dessus.

Notons tout de suite que :

1. Le cas $AB = AD$ relève de la même rotation que ci-dessus, quel que soit l'angle $\widehat{BAD}$ (angle de la rotation).

2. Le cas $AB \neq AD$ fait remplacer la rotation par une similitude.

3. Avec ces méthodes, la clé de la « détermination » de $\widehat{APD}$ réside dans la construction du triangle $PP'D$.
ce qui pose deux problèmes :

   3.1 le choix de PA, PB, PD peut-il être arbitraire ? Non ! Il faut pouvoir construire le triangle $P'PD$!

   3.2 La *construction* de ce triangle « détermine » $\widehat{P'PD}$, donc $\widehat{APD}$.
   Elle permettait à un candidat de Créteil de conjecturer un angle droit pour $\widehat{P'PD}$,... et de le démontrer pour obtenir une « valeur exacte » (en degrés ou radians) des deux angles $\widehat{P'PD}$ et $\widehat{APD}$. Mais ce cas est très particulier : il exige, par exemple avec $\widehat{BAD}$ et le rapport $\dfrac{AB}{AD}$ d'abord connus, un choix en conséquence de PA, PB, PD.

   Donner une « valeur exacte » ne serait généralement pas possible. Dans la plupart des cas, chercher à « déterminer $\widehat{P'PD}$ et $\widehat{APD}$ en degrés ou radians » ne se fera qu'avec des valeurs approchées obtenues, si l'on veut les calculer, par l'usage des formules liant angles et côtés d'un triangle (avec une calculette de préférence, pour une « bonne » approximation ;...).

4. Ce problème n'est pas sans rappeler celui de la « **forêt triangulaire** », problème venu de la revue suisse francophone « MATH-ECOLE », apparu dans le Bulletin n° 456 avec, notamment, **une solution « II.7 » adaptable ici quel que soit le triangle *ABD*** et dont l'idée-clé structure aussi la

solution 4 (Cf. son théorème implicite sur le lieu des points M tels que $\dfrac{ME}{MF} = k$, E et F fixes et k constant.

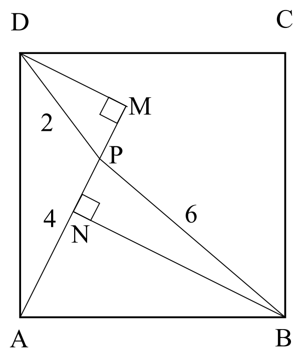
Solution 2 **(Henri Bareil)**

(Solution développée dans le Bulletin de l'APMEP n° 469 ou 470).

Il s'agit d'abord de « déterminer » $\widehat{APB}$ en le construisant :
Partons de P arbitraire.
Les points D, A, B sont respectivement sur les cercles $\delta(P;2)$, $\alpha(P;4)$, $\beta(P;6)$.
Soit A arbitraire sur α. B est l'image de D dans une rotation $(A;90^o)$. Il est donc l'un des points communs à β et à l'image du cercle δ dans cette rotation.
Etc.

Solution 3 **(François Parisot)**[1]

Soit $ABCD$ un carré avec le point P correspondant à l'énoncé.
On appelle M le projeté orthogonal de D sur (AP) et N celui de B sur (AP).



Dans le triangle rectangle MPD on pose $PM = a$ et $DM = b$, on a la relation : $a^2 + b^2 = 4$.
Les triangles rectangles ADM et BAN sont isométriques. (hypoténuses de même longueur et $\widehat{DAM} = \widehat{ABN}$).
Comme $AN = DM$, on en déduit que $PN = 4 - b$
Comme $AM = BN$, on a $BN = 4 + a$.
Appliquons le théorème de Pythagore au triangle NPB.
$(4 - b)^2 + (4 + a)^2 = 36$
En développant cette expression et en tenant compte du fait que $a^2 + b^2 = 4$ on obtient la relation $a = b$.

[1] *Solution proposée par François Parisot du lycée du Léon à Landivisiau (29) lors des journées de l'APMEP de Clermont-Ferrand.*

Donc le triangle MPD est rectangle-isocèle. On a donc $\widehat{DPM}$ =45°.
Il en résulte que l'angle $\widehat{APD}$ mesure 135°.

Solution 4 **(A. Guillemot)**

Approche Cabri .
En voici la trame (rendez-vous dans la brochure pour le texte complet)
1. En utilisant les barycentres $M(A;3);(B;2)$ et $N(A;3);(B;-2)$.
P est sur le cercle Γ de diamètre $[MN]$.
De même, P est sur le cercle Γ' de diamètre $[KJ]$, avec K barycentre de $(A;1)$, $(D;2)$ et J barycentre de $(A;1)$, $(D;2)$.
Les deux cercles se coupent en deux points dont l'un, P, est intérieur au carré.
Un tracé correct semble indiquer que $\widehat{APD} = 135°$

2. Démonstration en supposant que $\widehat{APD} = 135°$.
2.1. *Calcul de la longueur du côté du carré :*
Avec APD et Al-Kashi, $AD = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.
2.2. *Calcul de* $\cos\widehat{DAP}$ *toujours avec APD et Al-Kashi :*
$\cos\widehat{DAP} = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2\sqrt{5+2\sqrt{2}}}$
2.3. Calcul de $\cos\widehat{PAB}$: ... $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{\sqrt{34}}$
2.4. *Calcul de PB avec le triangle APB et Al-Kashi :* $PB = 6$
D'où la conclusion...