

🌀 Baccalauréat C Créteil - Paris - Versailles - juin 1987 🌀

I

5 POINTS

Dans le plan orienté, on considère quatre points A, B, C, D distincts deux à deux.

On note I le milieu de [BD], J le milieu de [AC] et O l'isobarycentre de (A, B, C, D).

On construit les triangles rectangles isocèles ABM, BCN, CDP et DAQ tels que les angles orientés $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}), (\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NB}), (\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PC})$ et $(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QD})$ admettent pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

On note K le milieu de [MP] et L le milieu de [NQ].

On se propose d'étudier la configuration (I, J, K, L). À cet effet, on pourra prendre un repère orthonormal direct d'origine O et introduire les affixes a, b, c de A, B, C, D, les affixes m, n, p, q de M, N, P, Q et les affixes f, g, k, l de I, J, K, L.

1. Déterminer le milieu de [IJ].
2. Prouver que $m(1 - i) = a - ib$. Calculer de manière analogue n, p et q .
3. Déterminer l'isobarycentre de (M, N, P, Q). En déduire le milieu de [KL].
4. Effectuer une figure soignée en prenant $a = -2 + 2i, b = -2 - i, e = -2i$ et $d = 4 + i$.
5. Soit r le quart de tour direct de centre O. Montrer que $r(J) = K$.
6. Caractériser les configurations (A, B, C, D) telles que $I = J$.
Indiquer alors la position de K et de L et la nature de (M, N, P, Q).
Ce cas étant écarté, prouver que (I, K, J, L) est un carré de centre O.

II

4 POINTS

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ modulo 2π .

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

1. On désigne par Γ_A, Γ_B et Γ_C les cercles de diamètres respectifs [AI], [BI] et [CI].
 - a. Effectuer une figure : on dirigera (BC) suivant l'axe des abscisses et on prendra 8 cm pour longueur de [BC].
 - b. Soit r la rotation de centre I et d'angle ayant pour mesure $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer les images par r de Γ_C et Γ_A .
Par quelle transformation simple passe-t-on de Γ_C à Γ_B ?
2. Pour tout point M de Γ_A distinct de I, J et K, on note N le point où la droite (MK) recoupe Γ_B et P le point où la droite (MJ) recoupe Γ_C .
 - a. Établir que les droites (IM) et (IP) sont orthogonales. (On pourra utiliser la cocyclicité des points A, M, I, J et des points C, P, I, J.)
 - b. Déterminer les images par r de P et de M.
En déduire que I est le milieu de [NP] et que le triangle MNP est rectangle isocèle.
Préciser ce triangle sur la figure.

c. Déterminer une similitude directe transformant ABC en MNP.

PROBLÈME**11 POINTS**

Dans ce problème, on étudie la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x > 0) \quad \text{et } f(0) = 1,$$

ce qui fait l'objet de la partie I.

Dans la partie II. on décrit une méthode de calcul d'une valeur approchée de l'intégrale

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

I. Étude de la fonction f **1. Dérivation de f**

Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.

2. Signe de f .

a. Déterminer les nombres réels $x \geq 0$ tels que $f(x) = 0$.

On rangera ces nombres en une suite strictement croissante $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$.

b. Étudier le signe de f .

3. Encadrement de f

a. Prouver que pour tout nombre réel $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Déterminer les nombres réels $x > 0$ tels que $f(x) = \frac{1}{x}$ et ceux tels que $f(x) = -\frac{1}{x}$.

On rangera ces nombres en des suites strictement croissantes $(b_1, b_2, \dots, b_k, \dots)$ et $(c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$.

c. En déduire la position relative de la courbe représentative C de f et des courbes représentatives H_+ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et H_- de $x \mapsto -\frac{1}{x}$.

Comparer les tangentes à C et H_+ au point d'abscisse b_k ainsi que les tangentes à C et H_- au point d'abscisse c_k .

4. Variations de f

a. Étudier le signe de $x \mapsto \tan x - x$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

En déduire le signe de f' sur cet intervalle.

b. Prouver que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un élément x_k et un seul de

$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ tel que $\tan x_k = x_k$; montrer que $x_k > k\pi$.

c. En déduire le signe de f' sur $]0; x_1[$, puis sur chaque intervalle $]x_k; x_{k+1}[$, où $k = 1, 2, \dots$

5. Étude de f en 0

- a. Prouver que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}.$$

(Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par

$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, on calculera les dérivées φ' , φ'' et φ''' et on en déduira le signe de φ .)

- b. Prouver que f est dérivable au point 0 et calculer $f'(0)$.

6. Courbe représentative de f

- a. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; 3\pi]$.

- b. Tracer sur une même figure les courbes H_+ , H_- et C en se limitant à l'intervalle $[0; 3\pi]$ et placer les points a_k, b_k, c_k et x_k .

On utilisera les valeurs approchées $x_1 \approx 4,49$ et $x_2 \approx 7,73$.

(Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 3 cm sur l'axe des ordonnées.)

II. Approximation de l'intégrale J

(On pourra comparer les dérivées des deux membres.) 1• h)

1. Transformation de J

Pour tout élément u de $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; on pose $F(u) = \int_{\frac{\pi}{2}}^u \frac{\sin t}{t} dt$ et pour tout élément x de

$\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on pose $G(x) = \int_0^x \frac{\sin \pi t}{1-t} dt$.

- a. Prouver que pour tout élément x de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:

$$G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x)).$$

(On pourra comparer les dérivées des deux membres.)

- b. En déduire que $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi t}{1-t} dt$.

2. Approximation de J

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi t dt \quad \text{et si } n \geq 1, \quad u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin \pi t dt.$$

- a. Prouver que, pour tout $n \geq 1$,

$$J = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + r_n$$

$$\text{où } r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} dt.$$

- b.** Établir que, pour tout élément t de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

$$\frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \leq 2t^n.$$

En déduire une majoration simple de r_n .

- c.** Montrer que $J = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})$.

3. Calcul des intégrales u_n

- a.** Calculer u_0 et u_1 .

- b.** Établir que pour tout entier $n \geq 2$.

$$u_n = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)u_{n-2} \right].$$

4. Conclusion

À partir des résultats obtenus en 2. et 3., indiquer une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision 10^{-2} . (On ne demande pas d'effectuer ce calcul.)