Solution de Colette Grippon (Buxerolles)

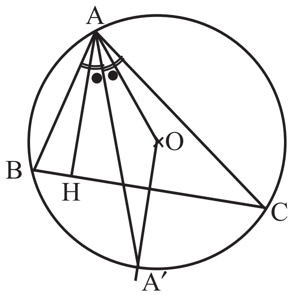
Soit le triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit, H le pied de la hauteur issue de A sur le côté [BC], A′ l'intersection de la médiatrice de [BC] avec l'arc BC. A′ est le milieu de l'arc BC.

(AA′) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, donc $\widehat{BAA'} = \widehat{A'AC}$.

(AH) // (OA′) car ces deux droites sont perpendiculaires à (BC).

$\widehat{HAA'} = \widehat{AA'O}$ (angles alternes-internes) et $\widehat{AA'O} = \widehat{A'AO}$ (angles à la base du triangle isocèle AOA').

Par transitivité : $\widehat{HAA'} = \widehat{A'AO}$, d'où (AA′) est bissectrice de l'angle $\widehat{HAO}$.

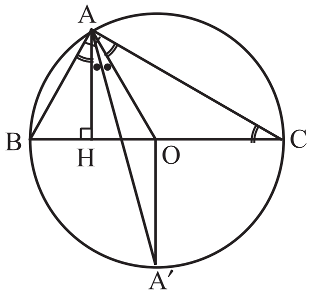


Pour répondre au problème posé, il faut donc que [AO] soit la médiane relative au côté [BC], donc que O soit le milieu de [BC] tout en étant centre du cercle circonscrit au triangle. Il faut donc que le triangle ABC soit rectangle en A. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

$\widehat{HAO} = \widehat{B} - \widehat{C}$ (dans tous les cas, triangle rectangle ou non).

Avec un triangle rectangle : $\widehat{HAO} = 45$ ° et $\widehat{C} = \widehat{OAC} = 22{,}5°$.

(Dans le cas de la figure ci-contre, ce n'est pas vrai.)



Conclusion : il existe un triangle ABC tel que la hauteur issue de A, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et la médiane relative au côté [BC] partagent l'angle $\widehat{BAC}$ en quatre angles de même mesure. **C'est un triangle rectangle en A et tel que l'angle $\widehat{C}$ mesure 22,5°**.