Solution de Jean Fromentin (Niort)

Une solution de ce problème repose sur l'idée que les quatre angles égaux intercepteront quatre arcs de même mesure sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
Partant de cette idée, considérons un cercle (C) de centre O, une corde [BC] de ce cercle et son milieu I. (Fig. 1)
Partageons l'arc BC en quatre arcs de même mesure :

BM, MN, NP et PC. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupera le cercle au point N. La hauteur et la médiane issues de A étant de part et d'autre de la bissectrice, la médiane coupera le cercle (C) en P.

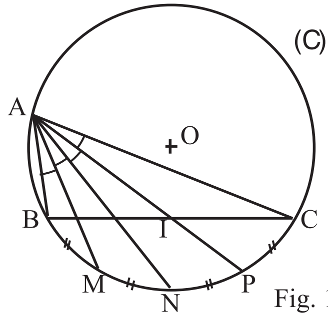

Fig. 1

Construisons alors le point A, deuxième point d'intersection de la droite (PI) avec le cercle (C). Pour tout triangle ABC construit de la sorte à partir de la corde [BC], la médiane (AP) issue de A, la bissectrice (AN) de l'angle $\widehat{ABC}$ et la droite (AM) partagent l'angle $\widehat{ABC}$ en quatre angles de même mesure.

Il reste donc à construire la corde [BC] telle que (AM) soit la hauteur du triangle ABC.
(AM) est hauteur si et seulement si (AM) est parallèle à (ON). Les angles alternes-internes $\widehat{MAN}$ et $\widehat{ANO}$ ont donc même mesure. (Fig. 2)

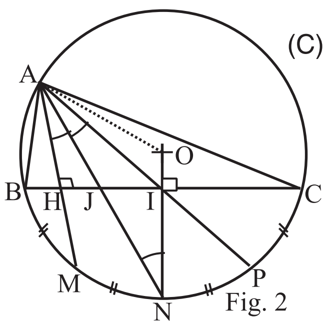

Fig. 2

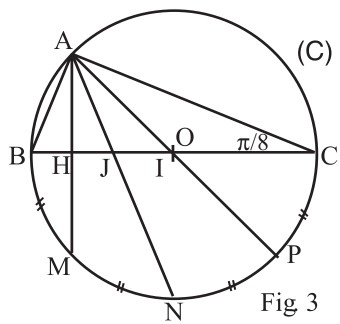

Fig 3

Par ailleurs, les angles $\widehat{MAN}$ et $\widehat{NAO}$ ont même mesure. Le triangle ANI doit donc être isocèle de sommet I. Or le triangle ANO est isocèle de même angle à la base que le triangle ANI. Donc le point I est en O, et [BC] est un diamètre du cercle (C). (Fig. 3)

Le triangle ABC solution du problème est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{8}$ et $\widehat{ABC} = \frac{3\pi}{8}$.