Solution de Georges Lion (Mata Utu – Wallis) :

Soit P, Q, R les pieds des hauteurs dans le triangle IJK. Par le théorème des milieux, AKIJ est un parallélogramme et U et P sont symétriques par rapport au milieu de [JK]. D'où $\dfrac{\overline{UK}}{\overline{UJ}} = \dfrac{\overline{PJ}}{\overline{PK}}$, et de même $\dfrac{\overline{VI}}{\overline{VK}} = \dfrac{\overline{QK}}{\overline{QI}}$, $\dfrac{\overline{WJ}}{\overline{WI}} = \dfrac{\overline{RI}}{\overline{RJ}}$. Par produit, on obtient :

$$\frac{\overline{UK}}{\overline{UJ}} \times \frac{\overline{VI}}{\overline{VK}} \times \frac{\overline{WJ}}{\overline{WI}} = \frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} \times \frac{\overline{QK}}{\overline{QI}} \times \frac{\overline{RI}}{\overline{RJ}}.$$

Les hauteurs de IJK étant concourantes, le second produit vaut -1 (Céva direct) ; le premier vaut donc aussi -1, ce qui assure le concours, ou le parallélisme, de (IU), (JV), (WK) (Céva réciproque). L'élimination du parallélisme ne m'a pas paru évidente, je propose :

1) Si ABC a trois angles aigus, U,V,W sont sur [JK], [KI], [IJ] respectivement et les trois droites étudiées ne peuvent pas être parallèles.

2) Si A, par exemple, est obtus, alors U est toujours sur [JK]. Supposons aussi, par exemple, AB ≤ AC. Alors par rapport à la droite (IU), B et K sont d'un côté, A et C donc aussi W sont de l'autre, et [KW] rencontre (IU).