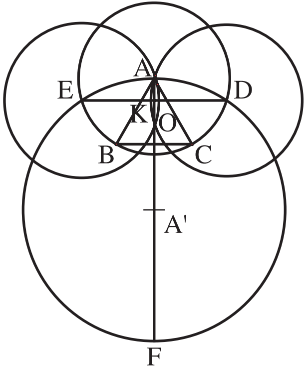
Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon) :



1°) On note a la longueur d'un côté du triangle équilatéral ABC ; on sait alors que la longueur d'une hauteur du triangle est $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ et que le rayon du cercle circonscrit est $r = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

– On construit A′ symétrique de A par rapport à la droite (BC), A′ est point d'intersection des cercles de

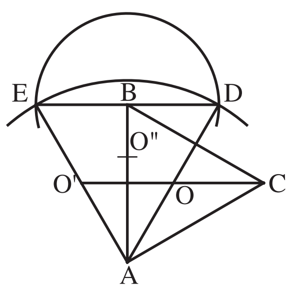
centres B et C et passant par A. On notera $\mathscr{C}$ cette construction du symétrique d'un point par rapport à une droite passant par deux points donnés.
– Le cercle de centre A′ passant par A et le cercle de centre A passant par B se coupent en D et E.
– Par la construction $\mathscr{C}$, on obtient le point O symétrique de A par rapport à la droite (DE).
Montrons que O est le centre du triangle ABC. Le point O est situé sur le diamètre [AF] du cercle de centre A′ considéré. Dans le triangle rectangle ADF, on a $AD^2 = AK \cdot AF$ où K est le point d'intersection des droites (DE) et (AF). On a

$AA' = 2h = a\sqrt{3}$, $AF = 2a\sqrt{3}$, $AD = AB = a$; d'où $AK = \dfrac{AD^2}{AF} = \dfrac{a^2}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$

et $AO = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = r$. Puisque O est situé sur une hauteur du triangle ABC, cela montre que O est le centre du triangle.

2°) On note α la longueur du segment donné [AB]. L'idée est de construire un triangle équilatéral de hauteur α ; le côté a de ce triangle est tel que $\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, d'où $a = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{3}}$. On remarque que le côté a cherché est le double du rayon du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté α. D'où la construction :

– Les cercles de centre A passant par B et de centre B passant par A se coupent en C et ABC est un triangle équilatéral de côté α.
– Par la construction de la question 1°), on obtient le point O, centre du triangle équilatéral ABC. On a $CO = \dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$.



– Par la construction $\mathscr{C}$, on obtient le point O′ symétrique de O par rapport à la droite (AB) ; on a $CO' = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{3}} = a$.
– Les cercles de centre A et de rayon CO′ = a et de centre B et de rayon $CO = \dfrac{a}{2}$ se coupent en D et E. Le triangle ADE est alors équilatéral de côté a et le segment[AB] donné est une hauteur de ce triangle.
– Par la construction de la question 1°), appliquée au triangle ADE, on obtient le point O″, centre du triangle ADE, situé au tiers du segment [AB].