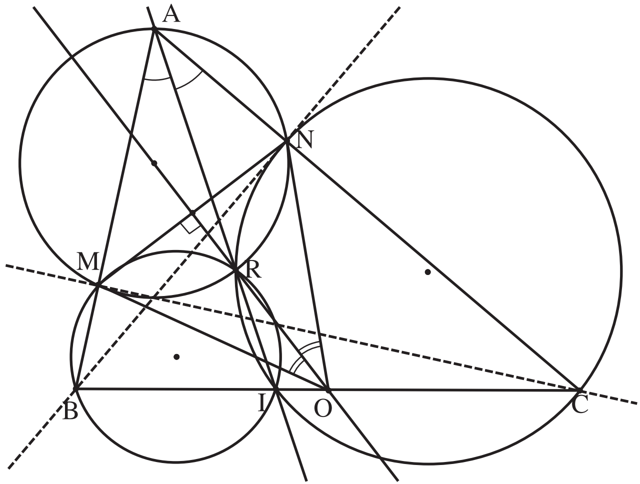
Solution d'Alain Corrée (Moulins)

Le triangle OMN étant isocèle, la bissectrice intérieure de l'angle en O est aussi médiatrice de [MN].
Dans le triangle AMN, la bissectrice intérieure de l'angle en A et la médiatrice de [MN] se coupent en R sur le cercle circonscrit au triangle AMN.
Le triangle ABC étant acutangle, M appartient au segment [AB], N appartient au segment [AC], A et R sont situés de part et d'autre de la droite (MN).

$$AM \cdot AB = AN \cdot AC = P_{A/C(O,OB)}$$

(puissance de A par rapport au cercle de centre O).
Les triangles AMN et ACB sont donc semblables d'où :



$\widehat{ANM} = \hat{B}$ et $\widehat{AMN} = \hat{C}$ ($\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ représentant les angles dans le triangle ABC).

En utilisant les angles inscrits dans le cercle circonscrit à AMN, on a : $\widehat{ARM} = \widehat{ANM} = \hat{B}$.

Donc $\widehat{MRI} = \pi - \hat{B}$ (I étant le pied de la bissectrice intérieure en A).

Les points M, R, I et B sont donc cocycliques, car R et B sont situés de part et d'autre de la droite (Ml), le triangle ABC étant acutangle.

Une démonstration analogue montre que N, R, I et C sont également cocycliques, par conséquent :

Les cercles circonscrits aux triangles MBR et NRC se coupent en I qui est le pied de la bissectrice intérieure de l'angle en A.