Solution d'Albert Marcout (Sainte-Savine)

$$a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

L'équation s'écrit donc :

$$x^3-\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(x-\left(a-\frac{1}{a}\right)\right)=0.$$

Le premier membre se factorise :

$$\left[x-\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]\left\{\left[x^2+x\left(a-\frac{1}{a}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right]+3\right\}=0.$$

Outre la racine $x_1=a-\frac{1}{a}$, l'équation a les racines de l'équation du second degré suivante :

$$x^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)x+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+3=0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2-4\left(a-\frac{1}{a}\right)^2-12=-3\left(\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right)=-3\left(a+\frac{1}{a}\right)^2.$$

Les autres racines sont donc :

$$x_2 = \frac{-\left(a - \dfrac{1}{a}\right) + \mathrm{i}\sqrt{3}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)}{2} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{-\left(a - \dfrac{1}{a}\right) - \mathrm{i}\sqrt{3}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)}{2}$$

qu'on peut écrire

$$x_2 = \frac{a\left(\mathrm{i}\sqrt{3} - 1\right)}{2} + \frac{1}{a} \times \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{-a\left(\mathrm{i}\sqrt{3} + 1\right)}{2} + \frac{1}{a} \times \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$