Notre collègue *Loïc Pomageot* (Creil) nous a transmis une solution pour l'équation donnée dans le bulletin n° 460 : $x^2 + 2x - 10^{10} = 0$. Il utilise les développements limités de $\sqrt{1+n}$ et trouve les solutions de l'équation à 10^{-42} près. Voici la solution qu'il propose en utilisant la calculatrice.

Tout d'abord $x_1 \approx -1+\sqrt{10^{10}} = -1+10^5 = 99\,999$ (avec une erreur très faible).

À l'aide de la table de valeurs de la calculatrice, on trouve (après affinements successifs) la valeur approchée suivante $x_1 \approx 99\,999{,}000\,005$ (pour laquelle la calculatrice renvoie exactement 0 … mais nous savons que x_1 est irrationnel, donc non décimal !).

Cherchons donc x_1 sous la forme $x_1 = 99\,999 + y_1$ (où $y_1 > 0$).
On a alors :

$$x^2 + 2x - 10^{10} = 99\,999^2 + 199\,998y + y^2 + 199\,998 + 2y - 10^{10} = y^2 + 2\times 10^5 - 1$$

car

$$99\,999^2 = \left(10^5 - 1\right)^2 = 10^{10} - 200\,000 + 1 = 10^{10} - 199\,999$$
$$\Rightarrow 99\,999^2 + 199\,998 - 10^{10} = -1.$$

On doit donc résoudre l'équation $y^2 + 2\times 10^5 y - 1 = 0$.

La solution positive de cette équation est $y_1 = -10^5 + \sqrt{10^{10} + 1}$.

On a $y_1 = -10^5 + 10^5\sqrt{1 + \dfrac{1}{10^{10}}} \approx -10^5 + 10^5\left(1 + \dfrac{1}{2\times 10^{10}}\right) = \dfrac{1}{2\times 10^5} = 5\times 10^{-6}$.

On va donc chercher y_1 sous la forme $y_1 = z_1 \times 10^{-6}$.

Ce qui donne $y^2 + 2\times 10^5 y - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 \times 10^{-12} + 2\times 10^{-1} z - 1 = 0$.

À l'aide de la table de valeurs, on obtient : $z_1 \approx 4{,}999\,999\,999\,87$.
Cherchons z_1 sous la forme : $z_1 = 5 - t_1$.
Ce qui donne :

$$z^2 \times 10^{-12} + 2\times 10^{-1} z - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(25 - 10t + t^2\right)\times 10^{-12} + 1 - 2\times 10^{-1} t - 1 = 0.$$

Après simplification, on doit résoudre

$$t^2 \times 10^{-12} - \left(2\times 10^{-1} + 10^{-11}\right)t + 25\times 10^{-12} = 0.$$

À l'aide de la table de valeurs, on obtient $t_1 \approx 1{,}249\,999\,999\,937 \times 10^{-10}$.
Finalement, on a :

$$z_1 = 5 - t_1 \approx 5 - 0{,}000\,000\,000\,124\,999\,999\,993\,7$$
$$= 4{,}999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3.$$

D'où

$$x_1 \approx 99\,999 + 4{,}999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3 \times 10^{-6}$$
$$= 99\,999{,}000\,004\,999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3.$$

Ensuite, on a

$$x_2 \approx -100\,001{,}000\,004\,999\,999\,999\,875\,000\,000\,006\,3.$$