Solution de Mathilde Lahaye-Hitier *(IUFM Bretagne) :*

Commençons par résoudre le problème dans **C**. Il suffira ensuite de restreindre l'ensemble des solutions à **R**. D'après les relations entre coefficients et racines, les complexes x, y, z et t vérifient le système donné si et seulement si ce sont les racines du polynôme $x^4 = 0$. On en déduit : $x = y = z = t = 0$, et les solutions réelles du système sont : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

Cette solution peut se retrouver aussi à la main de la façon suivante (on numérote les équations de (1) à (4)) :
D'après l'équation (4), ou bien x, ou bien y ou bien z ou bien t est nul. Sachant que le problème est symétrique en les variables, on peut supposer que c'est x qui est nul. Dans ce cas, le système devient :

$$y + z + t = 0 \tag{1'}$$
$$yz + yt + zt = 0 \tag{2'}$$
$$yzt = 0. \tag{3'}$$

D'après l'équation (3′), ou bien y ou bien z ou bien t est nul. Sachant que le problème est symétrique en les variables, on peut supposer que c'est y qui est nul. Dans ce cas, le système devient

$$z + t = 0 \tag{1''}$$
$$zt = 0 \tag{2''}$$

D'après l'équation (2″), ou bien z ou bien t est nul. Sachant que le problème est symétrique en les variables, on peut supposer que c'est z qui est nul. Dans ce cas, le système devient

$$z + t = 0 \tag{1'''}$$

et comme on a supposé $z = 0$, on obtient aussi $t = 0$. Finalement $x = y = z = t = 0$ est la seule solution possible.