Solution de René Manzoni ***(Le Havre) :***

Les lettres utilisées ci-après désignent des entiers naturels. En particulier, les lettres q, q' et q'' désignent des entiers naturels IMPAIRS. Sachant que

$$\begin{aligned}(2k-1)! &= 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k-4)\cdot(2k-2)\\ &= 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2^{k-1}\cdot (k-1)!,\end{aligned}$$

il vient

$$c = \binom{2k-1}{k} = \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2^{k-1}}{k!}.$$

Après avoir constaté que l'entier c est impair pour $k = 2^0$ ou $k = 2^1$ ou $k = 2^2$, tandis qu'il est pair pour $k = 3$, on est amené à raisonner par récurrence.
Si l'on suppose $k! = 2^{k-1}\cdot q$, alors on a $(2k)! = 2^{2k-1}\cdot q'$. En effet,

$$\begin{aligned}(2k)! &= 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2^{k}\cdot (k)!\\ &= 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2^{2k-1}\cdot q = 2^{2k-1}\cdot q'.\end{aligned}$$

Donc, pour tout k tel que $k = 2^a$, $k! = 2^{k-1}\cdot q$ et l'entier c est impair.
Par ailleurs, si l'on suppose que $k! = 2^x\cdot q$, avec $x < k - 1$, pour tout k tel que $2^a < k < 2^{a+1}$, on a alors $(2k)! = 2^y\cdot q'$ et $(2k + 1)! = 2^y\cdot q''$ avec $y < 2k - 1$, pour tout k tel que $2^{a+1} < 2\mathrm{k} < 2^{a+2}$. En effet

$$(2k)! = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)\cdot(2k-1)\cdot 2^{k+x}\cdot q = 2^{k+x}\cdot q' = 2^{y}\cdot q'$$

et $y = k + x < 2k - 1$. De plus on vérifie que le cas de $(2^{a+1} + 1)$! ne fait pas exception.
Donc pour tout k tel que $2^a < k < 2^{a+1}$, l'entier c est pair.