Une solution d'Alain Corré ***(Moulins)*** qui nous renvoie à l'article de Vincent Lefevre sur le triangle de Pascal dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et qui nous précise : De plus ce cas est abordé dans le livre de Ian Stewart « L'univers des nombres » (Éditions Belin – Pour la science). Il donne comme contrôle de la parité de $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, l'utilisation d'un théorème de Lucas. Considérons l'écriture en base 2 de m et n : $m = \sum_{i=0}^{+\infty} m_i 2^i$ et $n = \sum_{i=0}^{+\infty} n_i 2^i$, les n_i et les m_i prenant leurs valeurs dans $\{0\ ;\ 1\}$. On définit l'implication bit à bit de ces deux nombres et on obtient : $(n \Rightarrow m) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i 2^i$ où $a_i = 1$ sauf si $n_i = 0$ et $m_i = 1$, auquel cas $a_i = 0$.

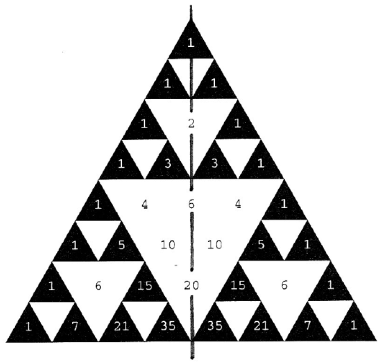
Si $(n \Rightarrow m)$ ne comporte que des 1 (dans ce cas, toutes les implications sont vraies), alors $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ est un nombre impair, sinon, dès qu'il existe un $a_i = 0$, $(n \Rightarrow m)$ est fausse et $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ est un nombre pair. Cette méthode est utilisable avec Derive qui utilise une logique bit à bit pour les entiers.

Pour le problème posé :

VECTOR(IF((k 2.k – 1) = -1, 1, 0), k, 1, 50)
[1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
En Derive, la représentation binaire ne comportant que des 1 est l'entier −1. Les 1 représentant les nombres impairs se trouvent aux positions 1, 2, 4, 8, 16 et 32 correspondant aux k égaux à des puissances de 2.

P.S. Une image simple :

Dans le triangle de Pascal, si l'on colorie en noir les coefficients binomiaux impairs et en blanc les coefficients binomiaux pairs, on obtient le crible de Sierpinski ci-contre qui est une figure fractale :
Autour de la médiatrice du triangle, seuls les nombres de la forme $\begin{pmatrix} 2^{p+1}-1 \\ 2^p-1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2^{p+1}-1 \\ 2^p \end{pmatrix}$ pour $p = 0, 1, \ldots$ sont impairs.



Donc $k = 2^p$ avec $p = 0, 1, \ldots$ est la réponse au problème.
On peut naturellement justifier tout ceci par le calcul.

Serge Parpay (*Niort*)