Solution de Raymond Raynaud (Digne)

Soit n un entier supérieur à 1. Il s'agit de démontrer que l'équation e_n :

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$$

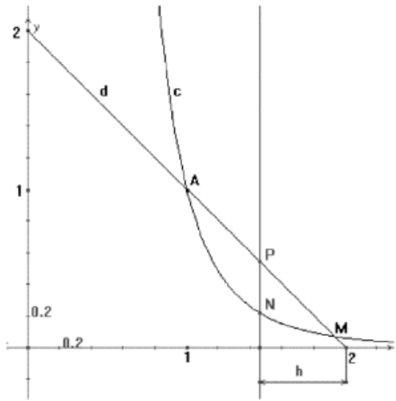
a une racine positive qui tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$.

e_n n'admet ni 0 ni 1 comme racine et pour tout x de $\mathbb{R} - \{0,1\}$:

$$x^n = x^{n-1} + \ldots + x + 1 \Leftrightarrow x^n = \frac{x^n - 1}{x - 1} \Leftrightarrow x^{n+1} - 2x^n = -1 \Leftrightarrow 2 - x = \frac{1}{x^n}.$$

Soit c et d les parties dans le premier quadrant des courbes représentatives des fonctions

$$x \rightarrow \frac{1}{x^n} \text{ et } x \rightarrow 2 - x .$$



Elles ont en commun deux points : le point A (1,1) et le point M dont l'abscisse x_M, comprise entre 1 et 2, est la solution positive de l'équation e_n.
Soit h un nombre positif inférieur à 1.
La droite d'équation $x = 2 - h$ coupe c et d respectivement en N et P.

$$y_P = h \text{ et } y_N = \frac{1}{(2-h)^n}.$$

Puisque $2 - h > 1$, pour tout h fixé, si petit soit-il, on peut, par le choix de n assez grand, rendre $(2 - h)^n$ aussi grand qu'on veut et par conséquent rendre y_N inférieur à y_P.
Cela réalisé, P est entre A et M, et $x_M > 2 - \text{h}$.
On peut donc conclure que :
Lorsque n tend vers l'infini la racine positive de l'équation e_n tend vers 2.