Solution de René Manzoni (Le Havre)

On pose $u_n = (\cos n)^n = \varepsilon \cdot |\cos n|^n = \varepsilon \cdot \exp(n \cdot \ln|\cos n|)$ avec ou bien $\varepsilon = +1$, ou bien $\varepsilon = -1$ lorsque $\cos n < 0$ et n impair.

On suppose connue la propriété qu'a l'ensemble des $\cos(n)$ d'être dense dans $[-1 ; +1]$. Soit a un élément fixé de l'intervalle $]0 ; 1[$ aussi proche de $+1$ qu'on le souhaite, mais, bien entendu, strictement plus petit que $+1$.

On note E le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ constitué des entiers n tels que $|\cos n| \leq a$.

Pour tout $n \in$ E, on a

$$\ln|\cos n| \leq \ln a,$$

$$\lim_{n \to +\infty,\, n \in \mathrm{E}} n \cdot \ln|\cos n| = -\infty\,;$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty,\, n \in \mathrm{E}} u_n = 0.$$

C'est dire que 0 est la seule valeur d'adhérence de la suite (u_n) dans l'intervalle [$-a$; $+a$].

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \mathrm{E}$, on a $|\cos n| > a$, $a^n < |\cos n|^n \leq 1.$ En vertu de la densité des cos n, cela montre qu'il existe des suites extraites de la suite (u_n) qui convergent, ou bien vers -1, ou bien vers $+1$. C'est dire que -1 et $+1$ sont des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) qui n'est donc pas convergente.