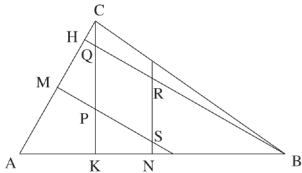


Solution de Frédéric Pillard (Châteauroux)

Les pieds des hauteurs et des médiatrices sont indiqués par la figure ci-contre.

Le parallélogramme PQRS n'existe que si ABC n'est pas plat et n'est pas isocèle en C (conditions initiales).



Choisissons un repère orthonormal $(A, \overline{AB}, \vec{\tau})$.

Appelons a et b les coordonnées de C .

Il vient alors : $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(a;b)$, $M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $K(a;0)$.

En écrivant que $\overline{BH} \cdot \overline{AC} = 0$ car $(BH) \perp (AC)$ et $\overline{AH} = \lambda \overline{AC}$ car A, H et C sont alignés, on obtient les coordonnées de $H\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}; \frac{ab}{a^2+b^2}\right)$.

En écrivant que $\overline{BQ} \cdot \overline{AC} = 0$ car $(BQ) \perp (AC)$ on obtient les coordonnées de $Q\left(a; \frac{a(1-a)}{b}\right)$.

Par la même méthode on obtient les coordonnées de $P\left(a; \frac{b^2-a^2}{2b}\right)$, $R\left(\frac{1}{2}; \frac{a}{2b}\right)$, $S\left(\frac{1}{2}; \frac{b^2-a(1-a)}{2b}\right)$.

Pour que le parallélogramme $PQRS$, s'il existe, soit un losange, il faut et il suffit que ses diagonales soient perpendiculaires et donc que le produit scalaire $\overline{PR} \cdot \overline{QS}$ soit nul ($\overline{PR} \neq \vec{0}$ et $\overline{QS} \neq \vec{0}$ par les conditions initiales).

$$\begin{aligned} \overline{PR} \cdot \overline{QS} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{a-b^2+a^2}{2b}\right) \left(\frac{b^2-3a(1-a)}{2b}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow b^2(1-2a)^2 + (a-b^2+a^2)(b^2-3a(1-a)) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3a^4 + 2a^2b^2 - 3a^2 - b^4 + b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (3a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Il y a donc deux solutions : $3a^2 - b^2 = 0$ soit $b = \pm a\sqrt{3}$ et donc C appartient à la droite Δ d'équation $y = x\sqrt{3}$ privée du point D tel que ABD soit équilatéral (conditions initiales), ou à la droite Δ' d'équation $y = -x\sqrt{3}$ privée du point D' tel que ABD' soit équilatéral (conditions initiales) ; il suffit donc que le triangle ABC soit tel que \widehat{BAC} mesure 60° ou 120° .

Ou bien $a^2 + b^2 - 1 = 0$ et donc C appartient au cercle de centre A et de rayon AB privé des points $B, D, S_A(B), S_{(AB)}(D)$ (conditions initiales).