

Solution de Christian Dufis (Limoges)

Avec la convention d'écriture de l'énoncé, il s'agit de démontrer la propriété $P(n)$ suivante :

Pour tout entier $n > 0$, il existe quatre nombres de n chiffres tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. Ce sont :

- $\underbrace{0\dots\dots 0}_{n \text{ chiffres}}$,
- $\underbrace{0\dots\dots 01}_{n-1 \text{ chiffres}}$,
- *deux autres nombres, l'un se terminant par 5 et l'autre par 6.*

On raisonne par récurrence pour $n \geq 1$. Un calcul élémentaire montre que :

$P(1)$ est vraie : les solutions sont 0, 1, 5 et 6,

$P(2)$ est vraie : On obtient 00, 01, 25 et 76.

Supposons la propriété vraie à l'ordre n et démontrons la à l'ordre $n + 1$.

Soit donc $N = \overline{u_n u_{n-1} \dots u_1 u_0}$ un nombre de $n + 1$ chiffres tel que son carré se termine par les mêmes $n + 1$ chiffres et posons $A = \overline{u_{n-1} \dots u_1 u_0}$. On a $A = N - u_n 10^n$, d'où

$A^2 = N^2 - 2u_n N 10^n + u_n^2 10^{2n}$. De cette dernière égalité résulte que les n derniers chiffres de A^2 sont les mêmes que les n derniers chiffres de N^2 . Or les n derniers chiffres de N^2 sont les mêmes que les n derniers chiffres de N , c'est-à-dire les chiffres de A .

Ainsi A est un nombre de n chiffres dont le carré se termine par les mêmes n chiffres.

D'après l'hypothèse de récurrence, A est donc $\underbrace{0\dots\dots 0}_{n \text{ chiffres}}$, $\underbrace{0\dots\dots 01}_{n-1 \text{ chiffres}}$, ou un nombre de n chiffres se terminant par 5 ou 6.

Par ailleurs, on a $N = u_n 10^n + A$; d'où $N^2 = u_n^2 10^{2n} + 2A u_n 10^n + A^2$. Or d'après ce qui vient d'être dit sur A , il existe un entier naturel q et un seul tel que $A^2 - A = q 10^n$. On en déduit :

$$N^2 - N = u_n^2 10^{2n} + u_n (2A - 1) 10^n + q 10^n,$$

ou encore :

$$N^2 - N = 10^n (u_n^2 10^n + u_n (2A - 1) + q).$$

Cela étant, pour que les $n + 1$ derniers chiffres de N^2 soient les mêmes que les $n + 1$ chiffres de N , il faut et il suffit que $N^2 - N$ soit un multiple de 10^{n+1} et donc il faut et

il suffit que $u_n (2A - 1) + q$ soit multiple de 10. Posons $E = u_n (2A - 1) + q$.

Nous allons prouver que pour chacune des quatre valeurs possibles de A il existe une valeur et une seule de u_n telle que E soit multiple de 10.

- $A = \underbrace{0 \dots 0}_n$. Comme $A^2 - A = q 10^n$, alors $q = 0$ et donc $E = -u_n$. Par suite, E sera un multiple de 10 si et seulement si $u_n = 0$. Dans ce cas $N = \underbrace{0 \dots 0}_{n+1}$.
- $A = \underbrace{0 \dots 0}_{n-1} 1$. On a encore $A^2 - A = 0$, d'où $q = 0$ et $E = u_n$. Par suite, E sera multiple de 10 si et seulement si $u_n = 0$ et on a ici $N = \underbrace{0 \dots 0}_n 1$.
- **A se termine par 5.** Reprenons l'expression $E = u_n (2A - 1) + q$ et soit v_0 le chiffre des unités de q . On a : $q \equiv v_0 \pmod{10}$ et $u_n (2A - 1) \equiv -u_n \pmod{10}$. Donc $E \equiv v_0 - u_n \pmod{10}$. Comme $-9 \leq v_0 - u_n \leq 9$, , alors E est multiple de 10 si et seulement si $u_n = v_0$.
- **A se termine par 6.** On a ici $q \equiv v_0 \pmod{10}$ et $u_n (2A - 1) \equiv u_n \pmod{10}$. Donc $E \equiv u_n + v_0 \pmod{10}$. Pour que E soit multiple de 10, il faut et il suffit que $u_n = 0$ si $v_0 = 0$ et que $u_n = 10 - v_0$ si $v_0 \neq 0$.

Ainsi, dans les quatre cas ci-dessus, il existe une valeur de u_n et une seule telle que E soit multiple de 10. $P(n + 1)$ est donc vraie, ce qui prouve la propriété de l'énoncé. Voici les 15 premières solutions autres que les solutions triviales 0 et 1 données par un programme informatique calqué sur le raisonnement ci-dessus.

5 ; 6
 25 ; 76
 625 ; 376
 0625 ; 9376
 90625 ; 09376
 890625 ; 109376
 2890625 ; 7109376
 12890625 ; 87109376
 212890625 ; 787109376
 8212890625 ; 1787109376
 18212890625 ; 81787109376

918212890625 ; 081787109376

9918212890625 ; 0081787109376

59918212890625 ; 40081787109376

259918212890625 ; 740081787109376