

Solution de Nicolas Pin (Saintes)

Remarquons tout d'abord que, pour tous réels $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x+z=\beta \\ y+z=\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)=x \\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)=y \\ \frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)=z \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{aligned} |x+y|+|y+z|+|z+x| &\leq |x|+|y|+|z|+|x+y+z| \\ \Leftrightarrow |\alpha|+|\beta|+|\gamma| &\leq \frac{1}{2}(|\alpha-\beta+\gamma|+|-\alpha+\beta+\gamma|)+\frac{1}{2}(|\alpha+\beta-\gamma|+|\alpha+\beta+\gamma|) \end{aligned}$$

Nous allons montrer cette dernière inégalité.

Pour cela, quelques propriétés algébriques de la fonction « valeur absolue » nous seront utiles.

La première est la suivante : pour tous réels a et b , $|a-b|+|a+b|=2 \cdot \max(|a|, |b|)$.
D'où l'on déduit que, pour tous réels α, β, γ :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(|\alpha-\beta+\gamma|+|-\alpha+\beta+\gamma|)+\frac{1}{2}(|\alpha+\beta-\gamma|+|\alpha+\beta+\gamma|) \\ &= \max(|\gamma|, |\alpha-\beta|)+\max(|\gamma|, |\alpha+\beta|) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous réels α, β, γ :

$$E \geq |\gamma|+|\alpha-\beta| \text{ et } E \geq |\gamma|+|\alpha+\beta| \quad (1)$$

Or, une autre propriété (cas particulier de la précédente...) de la valeur absolue nous dit que, pour tous réels α, β :

$$|\alpha|+|\beta| = \begin{cases} |\alpha-\beta| & \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ ont des signes contraires} \\ |\alpha+\beta| & \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ ont le même signe} \end{cases}$$

Il résulte alors de (1) que, pour tous réels α, β, γ :

$$E \geq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|.$$

Ce qui prouve l'inégalité souhaitée.

Cas d'égalité. D'après (1) :

– Si α et β ont des signes contraires, on aura égalité si et seulement si :

$$|\alpha + \beta| \leq |\gamma| \leq |\alpha - \beta|.$$

– Si α et β ont le même signe, on aura égalité si et seulement si :

$$|\alpha - \beta| \leq |\gamma| \leq |\alpha + \beta|.$$

Autrement dit, on a égalité si et seulement si $|\gamma|$ est compris entre $|\alpha - \beta|$ et $|\alpha + \beta|$, c'est-à-dire si et seulement si $|\gamma + z|$ est compris entre $|\gamma - z|$ et $|2x + \gamma + z|$.

Solution de Georges Lion (Wallis)

L'égalité est évidente si les trois nombres sont du même signe large ou bien si l'un d'eux est nul.

Sinon, éventuellement par permutation des lettres et changement des trois signes, on se ramène au cas suivant : x et $y > 0$, $z < 0$. Alors l'intervalle d'extrémités $x + z$ et $y + z$ est contenu dans $]z, x + y + z[$ et a le même milieu.

La fonction « valeur absolue » est convexe et non constante sur tout intervalle non ponctuel. La partie de sa courbe représentative pour t dans $]z, x + y + z[$ est contenue dans le demi-plan ouvert situé en dessous de la droite joignant les points d'abscisses z et $z + x + y$ de cette courbe.

D'où l'on déduit :

$$\frac{1}{2} (|x+z| + |y+z|) < \frac{1}{2} (|z| + |x+y+z|).$$

On termine en multipliant par 2 et en ajoutant $x + y$ des deux côtés.

Autres solutions : Olivier Ayassou (Cayenne), Robert Bourdon (Tourgeville), Jean-Claude Carrega (Lyon), Alain Corre (Moulin), René Manzoni (Le Havre), Raymond Raynaud (Dijon), Pierre Samuel (Hossegor).