Étude de la transformation du photomaton : Jean-Raymond Delahaye (Grenoble)

1. Définition de la transformation

L'image initiale est formée de 2^{16} carrés élémentaires (pixels).

On la décompose en 2^8 groupes de 4 carrés.

Chaque groupe est « éclaté » de la façon suivante : on rassemble les carrés situés dans l'angle « supérieur gauche » de chaque groupe dans le quart « supérieur gauche » de l'image résultante en conservant leurs positions relatives. On procède de la même façon pour les trois autres carrés de chaque groupe. L'image initiale est donc transformée de façon bijective en une image de même taille composée de 4 carrés de 2^8 pixels, chacun de ces 4 carrés paraissant être une image réduite de l'image initiale, mais composés, en fait, de pixels différents. On itère ensuite cette transformation.

Cette méthode s'étend immédiatement à toute image de $2n$ lignes et $2p$ colonnes.

2 Étude dans le cas d'une image dont les nombres de lignes et de colonnes sont respectivement égaux à 2n et 2p.

Chaque carré élémentaire de l'image est alors repéré par le couple (i,j) où $0 \leq i \leq 2n - 1$ et $0 \leq j \leq 2p - 1$, le carré en haut à gauche ayant pour coordonnées (0,0).
On note x_0 le numéro de colonne d'un carré élémentaire de l'image de départ et x_k le numéro de la colonne dans laquelle il se trouve après k itérations. Les numéros de

lignes sont notés de même y_0 et y_k.

– Déplacement des colonnes.
Il est clair que si $x_k = 2i + 1$, alors $x_{k+1} = n + i$ et si $x_k = 2i$ alors $x_{k+1} = i$.
On en déduit que, pour tout entier k, $2x_{k+1} \equiv x_k\ (2n - 1)$.
En combinant ces relations, on déduit que pour tout entier k, $2^k x_{k+1} \equiv x_0\ (2n - 1)$.
Le déplacement des lignes suit évidemment les mêmes règles, on retrouve donc des propriétés analogues pour les y_k.

– Condition sur k pour que l'image à l'étape k soit identique à l'image initiale.
Il est nécessaire et suffisant que toutes les colonnes et les lignes retrouvent leurs places initiales, c'est-à-dire que, pour les colonnes, pour tout x_0 de $\{0, \ldots, 2n - 1\}$, $2^k x_0 - x_0$ soit divisible par $2n - 1$.
De manière évidente, il suffit que $2k - 1$ soit divisible par $2n - 1$.
Cette condition est nécessaire, il suffit de donner à x_0 la valeur 1.
De même pour les lignes.
La condition nécessaire et suffisante pour que l'image à l'étape k soit identique à l'image initiale est donc : « $2n - 1$ et $2p - 1$ sont des diviseurs de $2^k - 1$ ».

– Cas où l'image contient 2^a lignes et 2^a colonnes.
La condition s'écrit : $2^{a+1} - 1$ est un diviseur de $2^k - 1$.
La condition est vérifiée si $2^{a+1} = 2^k$ c'est-à-dire $k = a + 1$ et c'est la plus petite valeur de k qui convient.
Dans le cas d'une image 256×256, $a = b = 8$, on retrouve donc pour la première fois l'image initiale après 9 itérations.
À noter que $k = 18$ convient aussi, puisque $2^{18} - 1 = (2^9 - 1)(2^9 + 1)$, de même tout multiple de k.

– Cas général.
Le petit théorème de Fermat dit que si d est un nombre premier et c un entier naturel non divisible par d, alors $c^{d-1} - 1$ est divisible par d.
Ici $c = 2$ et $d = 2n - 1$, on en déduit donc que $2^{(2n-1)-1} - 1$ est divisible par $2n - 1$.
Ce qui démontre que, si $2n - 1$ et $2p - 1$ sont premiers, alors $k = 2n - 2$ convient pour les colonnes et $k = 2p - 2$ convient pour les lignes, $k = \text{PPCM}(2n - 2, k2p - 2)$ est alors une solution.
Ce n'est cependant pas nécessairement la plus petite comme le montre le résultat dans le cas d'un image de 2^a lignes et 2^a colonnes.