

Solutions : Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raymond Heitz (Piriac), Michel Lafond (Dijon).

• Voici la solution de Michel Lafond.

(a) On cherche t pour que $(32, t, 9)$ soit un super-carré.

Il faut $32^2 + t^2 = u^2$ c'est-à-dire $(u - t)(u + t) = 1024$ et t compris entre 9 et 32.

On peut supposer t et u positifs.

$(u - t)$ et $(u + t)$ sont de même parité, donc les possibilités sont :

$u - t$	$u + t$	t
2	512	255
4	256	126
8	128	60
16	64	24

Seule $t = 24$ convient, et on vérifie que $(32, 24, 9)$ est bien un super-carré.

(b) $(132, 99, 88, 84)$ est un super-carré car

$$132^2 + 99^2 = 165^2$$

$$132^2 + 99^2 + 88^2 = 187^2$$

$$132^2 + 99^2 + 88^2 + 84^2 = 205^2.$$

Deux programmes simples donnent les super-carrés :

$(144, 108, 96, 85, 60)$ et $(924, 693, 616, 588, 492, 156)$ incitant à donner une réponse positive au (c).

(c) Il y a des super-carrés de toute taille, et pour démontrer cela, il suffit de démontrer qu'on peut toujours passer d'un super-carré de taille n à un super-carré de taille $n + 1$:

Supposons qu'on ait obtenu un super-carré $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ où $n \geq 2$.

On a donc

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2) + x_n^2 = a^2 + x_n^2 = b^2. \quad (1)$$

Il est clair que

$$a \geq 4, x_n \geq 3, b \geq 5 \quad (2)$$

car $(3, 4, 5)$ est le plus petit triplet pythagoricien non trivial possible.

Pour tout entier C , $(Cx_1, Cx_2, Cx_3, \dots, Cx_n)$ est un super-carré de taille n [évident].

Prenons $C = 2(b - 1)$ et $x_{n+1} = 2b - 1$.

On a

$$(Cb)^2 + x_{n+1}^2 = 4b^2(b-1)^2 + (2b-1)^2 = (2b^2 - 2b + 1)^2 \quad (3)$$

On a donc d'une part par hypothèse :

Pour tout entier k de 1 à n , $(Cx_1)^2 + (Cx_2)^2 + \dots + (Cx_k)^2$ est un carré parfait.

Et d'autre part d'après (1) et (3) :

$$(Cx_1)^2 + (Cx_2)^2 + \dots + (Cx_n)^2 + x_{n+1}^2 = (Cb)^2 + x_{n+1}^2 = (2b^2 - 2b + 1)^2$$

carré parfait.

De plus $Cx_n \geq 3C = 6b - 6 \geq 2b - 1 = x_{n+1}$ car $x_n \geq 3$ et $b \geq 5$.

$(Cx_1, Cx_2, Cx_3, \dots, Cx_n, x_{n+1})$ est donc un super-carré de taille $n + 1$. CQFD.

Exemple, à partir de $(4, 3)$ super-carré de taille 2, on a $4^2 + 3^2 = 5^2$ donc $b = 5$.

On prend $C = 2(b - 1) = 8$ et $x_3 = 2b - 1 = 9$.

On obtient le super-carré de taille 3 : $(4C, 3C, x_3) = (32, 24, 9)$ vu dans (a).

Ce dernier super-carré engendre par la même procédé le super-carré $(2560, 1920, 720, 81)$ etc.