Les angles $\widehat{\mathrm{DEB}}$ et $\widehat{\mathrm{DAB}}$ sont égaux car ils interceptent le même arc DB ; les angles $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{AEB}}$ sont égaux car ils interceptent les arcs égaux AC et AB.

Or $\widehat{\mathrm{DFG}} = \pi - \widehat{\mathrm{FBA}} - \widehat{\mathrm{FAB}}$ et $\widehat{\mathrm{DEG}} = \widehat{\mathrm{DEB}} + \widehat{\mathrm{BEA}}$;

donc les angles $\widehat{\mathrm{DFG}}$ et $\widehat{\mathrm{DEG}}$ sont supplémentaires et le quadrilatère DEGF admet un cercle circonscrit.
D'après le théorème de Ptolémée, on a $\mathrm{FE} \times \mathrm{DG} = \mathrm{DF} \times \mathrm{GE} + \mathrm{FG} \times \mathrm{DE}$.

Remarques.
Toutes les solutions proposées sont basées sur l'application du théorème de Ptolémée. Pour montrer la cocyclicité des points D, F, G et E, certains ont utilisé une inversion de pôle A ou ont montré que $\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$.
Jean-Yves Hély propose une démonstration du théorème de Ptolémée accessible en Seconde avec le prérequis de la formule $\dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{\mathrm{A}}$ pour l'aire d'un triangle.