Solutions : Louis-Marie Bonneval (Poitiers), Michel Lafond (Dijon).

• Voici la solution de Michel Lafond.

On considère P(x) comme le début d'un carré puisque

$$\left(x^3+x-1\right)^2=x^6+2x^4-2x^3+x^2-2x+1.$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(x)=\left(x^3+x-1\right)^2+199809x^2-272670x+$$

Vu la question on se doute que $199809x^2-272670x+93025$ est un carré exact.

C'est le cas. $\mathrm{P}(x)=\left(x^3+x-1\right)^2+\left(447x-305\right)^2$ est strictement positif. En effet :

$\alpha=\dfrac{305}{447}$ n'est pas racine de P (x) puisque :

$$\mathrm{P}(\alpha)=\left(\alpha^3+\alpha-1\right)^2=\left(\frac{305^3+305\times447^2-447^3}{447^3}\right)^2=\left(-\frac{253}{447^3}\right)^2\neq0.$$

De plus

$$P(\alpha) = \frac{253^2}{447^6} < \frac{256^2}{400^6} = \frac{2^{16}}{2^{12}10^{12}} = \frac{16}{10^{12}} < 10^{-10}.$$

Donc le minimum de P est compris entre 0 et 10^{-10}.

Remarque. Michel Lafond indique que les logiciels ne manquent pas pour trouver que le minimum de P vaut environ $8{,}02 \times 10^{-12}$.
Le voir graphiquement est possible à condition de zoomer et de pouvoir travailler avec beaucoup de chiffres significatifs.
Dans le même genre, est positif pour tout x réel et le minimum est entre 0 et 7×10^{-17}.