

- A. Voici la solution de Michel Lafond.

Si a est un réel positif, posons pour tout entier naturel n :

$$S_n = a^n + \frac{1}{a^n}.$$

On a :

$$S_{n-1} S_1 = \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}} \right) \left(a + \frac{1}{a} \right) = a^n + a^{n-2} + \frac{1}{a^{n-2}} + \frac{1}{a^n} = S_n + S_{n-2}.$$

Donc on a la récurrence

$$S_n = S_1 S_{n-1} - S_{n-2}$$

et en particulier pour $n = 2$:

$$S_2 = S_1^2 - 2.$$

.

Puisque par hypothèse $S_2 = 5$, on en déduit $S_1 = \sqrt{7}$ et la récurrence :

$$S_n = \sqrt{7} S_{n-1} + S_{n-2}.$$

On peut donc calculer :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S_n	2	$\sqrt{7}$	5	$4\sqrt{7}$	23	$19\sqrt{7}$	110	$91\sqrt{7}$	527