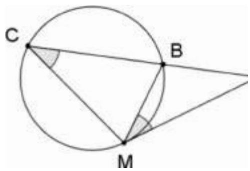
- Voici la solution de Georges Lion.

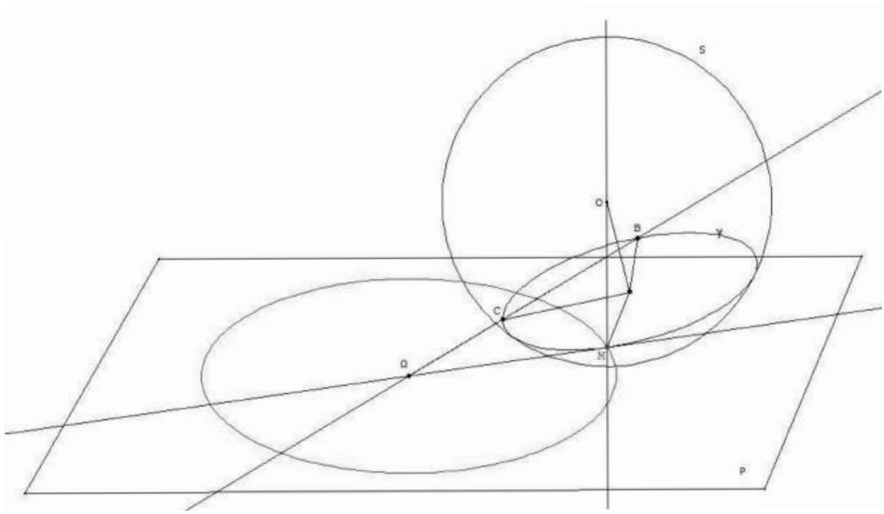
On doit distinguer deux cas :

1) La droite (BC) est parallèle au plan donné .
Le plan Q médiateur de [BC] est plan de symétrie de la figure et le centre O de la sphère tangente à P appartient à ce plan, donc le point de contact appartient à $P \cap Q$.
Réciproquement, soit M un point de $P \cap Q$. La perpendiculaire à P menée par M coupe en O le plan médiateur de [MB].
La sphère de centre O passant par B et C est bien tangente à P en M.
Le lieu cherché est la droite $P \cap Q$.

2) La droite (BC) coupe P en un point Ω en dehors de [BC].
Énonçons d'abord un résultat préliminaire dans le plan, conséquence du théorème de l'angle inscrit sous sa forme la plus simple.
Soient B et C deux points d'un cercle γ et $\Omega \in (BC) \setminus [BC]$, alors pour $M \in \gamma$, on a :



(ΩM) est tangente à $\gamma \Leftrightarrow \widehat{\Omega MB} = \widehat{\Omega CM}$
$\Leftrightarrow$ les triangles ΩMB et ΩCM sont semblables
$\Leftrightarrow$ ΩM est la moyenne géométrique de ΩB et ΩC.
Retour au problème posé : soit S une sphère passant par B et C et C tangente à P en un point M. On note γ le cercle d'intersection de S et du plan MBC. Alors (ΩM) est tangente à γ; donc ΩM est la moyenne géométrique de ΩB et ΩC.



Réciproquement, soit M dans P tel que $\Omega M = \sqrt{\Omega B \times \Omega C}$; alors (ΩM) est tangente au cercle γ circonscrit au triangle MBC. Le plan Q perpendiculaire à (ΩM) en M contient l'axe de γ et la perpendiculaire à P menée par M. Ces deux droites sont donc sécantes en O et la sphère de centre O et de rayon OM passe par B et C et est tangente à P en M.

Dans P, le lieu cherché est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{\Omega B \times \Omega C}$..