Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Michel Sarrouy (Mende), Michel Lafond (Dijon), Patrick Tardivel (Toulouse).

Voici la solution de Patrick Tardivel.

▪ Nous allons montrer que $s(s(s(a))) = 4$.
On rappelle que tout entier naturel n est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

Ainsi $a \equiv s(a) \bmod(9)$ d'où $a \equiv s(s(s(a))) \bmod(9)$.

Nous avons $3^{2014} \equiv 9^{1007} \equiv 0 \bmod(9)$ d'où $2a \equiv -1 \equiv 8 \bmod(9)$

Par ailleurs, 2 a pour inverse 5 dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, ainsi $a \equiv 5 \times 8 \equiv 40 \equiv 4 \bmod(9)$.

Donc, $s(s(s(a))) \equiv 4 \bmod(9)$.

Nous savons que l'entier a au plus 1007 chiffres donc $s(a) \leq 1007 \times 9$, soit $s(a) \leq 9063$.

Ainsi, $s(a)$ a au plus 4 chiffres donc $s(s(a)) \leq 36$.

Enfin, si n est un entier compris entre 0 et 36, on a $s(n) \leq s(29)$.

Alors, $s(s(s(a))) \leq 11$ et comme $s(s(s(a))) \equiv 4 \bmod(9)$, nous en déduisons finalement que $s(s(s(a))) = 4$.

- Nous allons montrer que $\mathrm{d}(a) = 4$.

On a $a \equiv \mathrm{d}(a) \bmod(10)$.

Par ailleurs, $3^4 \equiv 1 \bmod(10)$ d'où $3^{503\times4+2} \equiv 9 \bmod(10)$ et ainsi $2a \equiv 8 \bmod(10)$.

2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, cependant, nous allons voir que l'entier a peut être congru à 4 ou 9 modulo 10.

Classe de a dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Classe de $2a$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8

D'où, $a \equiv 4 \bmod(10)$ ou $a \equiv 9 \bmod(10)$.

Pour montrer que $a \equiv 4 \bmod(10)$, nous allons étudier la parité de a. Cependant, plutôt que de déterminer la classe de a dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ce qui va être délicat puisque le dénominateur de a est 2, nous allons déterminer la classe de $2a$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

On a $3 \equiv -1 \bmod(4)$ d'où $3^{2014} \equiv 1 \bmod(4)$, donc $2a \equiv 0 \bmod(4)$.

Ainsi, $2a$ est un multiple de 4, donc, a est pair et on en déduit que $a \equiv 4 \bmod(10)$, soit $\mathrm{d}(a) = 4$.

- Conclusion : $s(s(s(a))) = \mathrm{d}(a) = 4$.

Remarque. En utilisant les logarithmes on obtient $s(a) \leq 8649$ puis $s(s(a)) \leq 34$.